

Jak matematyk widzi Ziemię, czyli o geometrii sferycznej

Maciej Czarnecki

Uniwersytet Łódzki
Wydział Matematyki i Informatyki

19 marca 2025

I LO im. W. Broniewskiego, Bełchatów
w ramach projektu *Matematyka po* $\frac{\text{łó}}{\text{lu}}$ *dzku*

Przestrzeń 3-wymiarowa

Przestrzeń 3-wymiarową opisujemy w terminach geometrii analitycznej

$$\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) ; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

i jej elementy traktujemy jako punkty lub wektory — w tym drugim przypadku można uważać, że wektor x to wektor od początku układu $\theta = (0, 0, 0)$ do punktu x .

Wektorem o początku w punkcie x i końcu w punkcie $y = (y_1, y_2, y_3)$ jest

$$\overrightarrow{xy} = y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$$

Iloczyn skalarny i norma

Iloczynem skalarnym wektorów $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ nazywamy liczbę

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Długością wektora $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ nazywamy liczbę

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Odległość euklidesowa

Odległością euklidesową punktów $A, B \in \mathbb{R}^3$ nazywamy liczbę

$$|AB| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2 + (B_3 - A_3)^2}$$

Odległość euklidesowa punktów jest długością odcinka, który je łączy.

Odległość sferyczna

Kątem pomiędzy niezerowymi wektorami $x, y \in \mathbb{R}^3$ nazywamy taką liczbę $\angle(x, y) \in [0, \pi]$, że

$$\cos \angle(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Sferą jednostkową nazywamy zbiór

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 ; \|x\| = 1\},$$

czyli sferę o środku θ i promieniu 1.

Odległością sferyczną punktów $A, B \in \mathbb{S}^2$ nazywamy liczbę

$$d(A, B) = \angle(A, B) = \arccos \langle A, B \rangle.$$

Odległość sferyczna a odległość euklidesowa

Odległość euklidesowa punktów sfery $\mathbb{S}^2$ nie przekracza odległości sferycznej. Różnica jest tym mniejsza, im punkty są sobie bliższe. Równość występuje tylko punktów pokrywających się.

Biegun północny $N = (0, 0, 1)$ i **biegun południowy**

$S = (0, 0, -1)$ mają odległość euklidesową równą $|NS| = 2$, a ich odległość sferyczna wynosi $d(N, S) = \pi > 2$.

Na sferze wyróżniamy:

- ▶ **równik** — okrąg powstały przekroju sfery płaszczyzną przechodzącą przez θ i prostopadłą do prostej NS ,
- ▶ **południki**, czyli półokręgi pomiędzy biegunami otrzymane z przekroju sfery $\mathbb{S}^2$ płaszczyzną zawierającą prostą NS ,
- ▶ **równoleżniki**, czyli okręgi powstałe z przekroju sfery płaszczyzną równoległą do płaszczyzny równika.

Geodezyjne na sferze

Poruszając się po **odcinku** w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z szybkością 1, czyli tak, że wektor styczny jest stały i ma długość 1, otrzymujemy punkty odległe (euklidesowo) o czas, który jest potrzebny na przebycie drogi pomiędzy nimi.

Na sferze $\mathbb{S}^2$ taką rolę odgrywają **geodezyjne**, czyli krótsze łuki okręgu powstałego z przecięcia sfery płaszczyzną przechodzącą przez θ (łuki **okręgów wielkich**).

Południki są geodezyjnymi na sferze, natomiast żaden łuk równoleżnika różnego od równika nie jest geodezyjną.

Wektory kierunkowe geodezyjnych

Aby poruszać się po geodezyjnej z szybkością 1 oznaczamy dla $A, B \in \mathbb{S}^2$, $A \neq \pm B$ ich odległość sferyczną przez ϱ , i **wektor kierunkowy** wzorem

$$u = \frac{1}{\sin \varrho} B - \frac{\cos \varrho}{\sin \varrho} A.$$

Wówczas geodezyjną od A do B przebiegamy w czasie ϱ według wzoru

$$\gamma(t) = (\cos t) A + (\sin t) u, \quad t \in [0, \varrho].$$

Kątem pomiędzy geodezyjnymi wychodzącymi z jednego punktu A w zgodzie z wektorami kierunkowymi u i v nazywamy kąt pomiędzy tymi wektorami w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Trygonometria sferyczna

Sferyczne twierdzenie cosinusów

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Sferyczne twierdzenie sinusów

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Trygonometria sferyczna

Drugie sferyczne twierdzenie cosinusów

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

Suma kątów w trójkącie sferycznym

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Współrzędne geograficzne

Na znacznej części sfery można wprowadzić **współrzędne geograficzne** przysuwając punktowi $X \in \mathbb{S}^2$:

- ▶ **długość geograficzną** u liczoną od ustalonego południka (tzw. **południka zero**) jako kąt skierowany, który tworzy południk zero z południkiem przechodzącym przez X ,
- ▶ **szerokość geograficzną** v liczoną jako kąt skierowany, który tworzy wektor X z płaszczyzną równika.

Wówczas punkt X można zapisać w postaci

$$X = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

Takie współrzędne mają zakres $u \in (-\pi, \pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i nie można nimi objąć “linii zmiany daty” wraz biegunami.

Rzut stereograficzny

Odwrotnym rzutem stereograficznym z bieguna północnego N nazywamy odwzorowanie przypisujące punktowi Y płaszczyzny $x_3 = 0$ punkt wspólny prostej NY ze sferą $\mathbb{S}^2$, różny od N .

Takie odwzorowanie nadaje na sferze współrzędne

$$X = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \right)$$

i obejmuje nimi całą sferę $\mathbb{S}^2$ bez bieguna północnego.

Rzut stereograficzny zachowuje kąty, ale zaskakująco zmienia odległości — punkty bliskie bieguna północnego są bardzo daleko.

Rzut Mercatora

Odwrotnym rzutem Mercatora nazywamy przypisanie punktowi pasa $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ punktu na sferze $\mathbb{S}^2$ powstałego z owinięcia sfery walcem (środek pasa jest styczny do południka zero) i odzworowanie tworzącej walca na południk bez biegunów.

Współrzędne te mają postać

$$X = (\cos u \cos(\arctan t), \sin u \cos(\arctan t), \sin(\arctan t)).$$

Rzut Mercatora bardzo rozciąga okolice podbiegunowe i działa, podobnie jak współrzędne geograficzne na sferze z pominięciem “linii zmiany daty” wraz z biegunami.

Sferyczne vs. euklidesowe twierdzenie cosinusów

Dla trójkątów sferycznych o bardzo krótkich bokach sferyczne twierdzenie cosinusów przybliża się dobrze euklidesowemu. Wynika to z rozwinięcia funkcji trygonometrycznych w szereg potęgowy:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Przyjmując w sferycznym twierdzeniu cosinusów $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$ i $\sin x \simeq x$ dla małych a, b, c dostajemy

$$1 - \frac{c^2}{2} = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) + ab \cos \gamma,$$

co po odrzuceniu składnika stopnia 4 (jest baaardzo mały) daje euklidesowe twierdzenie cosinusów.