

Ułatwianie rzeczy trudnych, czyli jak algebraizować geometrię

Maciej Czarnecki

Uniwersytet Łódzki
Wydział Matematyki i Informatyki

18 marca 2025

w ramach projektu *Matematyka po* $\frac{\text{łó}}{\text{lu}}$ *dzku*

Funkcja liniowa

Przekształceniem liniowym prostej nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = ax$$

dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

Funkcją liniową na prostej lub **przekształceniem afinicznym prostej** nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = ax + b$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.

Składanie funkcji liniowych

Jeżeli $f(x) = ax$ oraz $g(x) = cx$ są przekształceniami **liniowymi** prostej, to ich złożeniem jest przekształcenie liniowe prostej

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (ac)x$$

Gdy $f(x) = ax + b$ oraz $g(x) = cx + d$ są przekształceniami **afinicznymi** prostej, to ich złożeniem jest przekształcenie afiniczne prostej

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (ac)x + (ad + b)$$

Zauważmy, że dla przekształceń afinicznych na ogół $f \circ g$ nie pokrywa się z $g \circ f$.

Funkcje odwrotne do funkcji liniowych

Jeżeli $f(x) = ax$ jest przekształceniem **liniowym** prostej i $a \neq 0$, to f posiada funkcję odwrotną

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x,$$

która też jest przekształceniem liniowym.

Gdy $f(x) = ax + b$ jest przekształceniem **afinicznym** prostej i $a \neq 0$, to f posiada funkcję odwrotną

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a},$$

która także jest przekształceniem afinicznym.

Przekształcenie liniowe płaszczyzny

Płaszczyznę nazywamy zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) ; x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Przekształceniem liniowym płaszczyzny nazywamy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ daną wzorem

$$f((x_1, x_2)) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

dla pewnych $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$.

Macierz przekształcenia liniowego płaszczyzny

Przekształcenie liniowe płaszczyzny

$$f((x_1, x_2)) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

jest związane z czwórką liczb

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{macierzą przekształcenia } f$$

Jeżeli dodatkowo zapiszemy argument (x_1, x_2) w postaci

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ oraz przyjmiemy, że $A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$, to
będziemy mogli pisać

$$f(X) = A \cdot X$$

Przykłady przekształceń liniowych płaszczyzny

- ▶ tożsamość Id
- ▶ symetria środkowa względem początku układu s_0
- ▶ symetrie środkowe względem osi układu s_1, s_2
- ▶ rzuty prostopadłe na osie układu π_1, π_2
- ▶ jednokładności względem początku układu H^s
- ▶ powinowactwa prostokątne względem osi układu A_1^k, A_2^k
- ▶ obroty dookoła początku układu R^α
- ▶ rzuty prostopadłe na proste przechodzące przez początek układu π_m
- ▶ symetrie względem prostych przechodzących przez początek układu s_m

ale już nie ...

translacje (poza zerową), obroty dookoła innych środków, symetrie względem dowolnych punktów i prostych itd.

Niektóre macierze przekształceń liniowych płaszczyzny

► tożsamość $\text{id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- symetria środkowa względem początku układu

$$s_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- symetrie środkowe względem osi układu $s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$

$$s_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- rzuty prostopadłe na osie układu $\pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$\pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Niektóre macierze przekształceń liniowych płaszczyzny

- ▶ jednokładności względem początku układu $H^s = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$
- ▶ powinowactwa prostokątne względem osi układu
 $A_1^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, A_2^k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- ▶ obroty dookoła początku układu $R^\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

Składanie przekształceń liniowych płaszczyzny

Jeżeli przekształcenia liniowe płaszczyzny f oraz g są dane odpowiednio macierzami

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

to złożenie $f \circ g$ jest przekształceniem liniowym danym macierzą

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

czyli aby uzyskać wyraz ij macierzy $A \cdot C$ należy wymnożyć “skalarnie” i -ty wiersz macierzy A przez j -tą kolumnę macierzy C .

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny

Przekształceniem afinicznym płaszczyzny nazywamy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ daną wzorem

$$f((x_1, x_2)) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2)$$

dla pewnych $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Przykładem przekształcenia afinicznego jest **translacja** T_B , gdzie

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Macierz przekształcenia afinicznego płaszczyzny

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny

$$f((x_1, x_2)) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2)$$

kojarzymy z macierzą 3×3

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Możemy wtedy pisać

$$f(X) = A \cdot X + B$$

a przekształcenia afiniczne składa się mnożąc odpowiadające im macierze.