

UNIwersytet Łódzki
Wydział Matematyki i Informatyki

Michał Klepczarek

Wartości bifurkacyjne funkcji klasy C^∞

XL KONFERENCJA
Łódź 2018

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}$, $W \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi. Mówimy, że funkcja gładka $f : W \rightarrow U$ jest trywialną wiązką, gdy istnieje punkt $y \in U$ taki, że zbiór $f^{-1}(y)$ jest rozmaitością klasy C^∞ i istnieje odwzorowanie $\psi_1 : W \rightarrow f^{-1}(y)$ takie, że odwzorowanie

$$\psi = (\psi_1, f) : W \ni x \mapsto (\psi_1(x), f(x)) \in f^{-1}(y) \times U$$

jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ . Odwzorowanie ψ nazywamy trywializacją funkcji f .

Definicja

Mówimy, że punkt $y \in \mathbb{R}$ jest wartością typową funkcji gładkiej $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y takie, że funkcja $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jest trywialną wiązką klasy C^∞ .

Punkt $y \in \mathbb{R}$, który nie jest wartością typową funkcji f , nazywamy wartością bifurkacyjną funkcji f . Przez $B(f)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich wartości bifurkacyjnych funkcji f .

Definicja

Mówimy, że punkt $y \in \mathbb{R}$ jest wartością typową funkcji gładkiej $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y takie, że funkcja $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jest trywialną wiązką klasy C^∞ .

Punkt $y \in \mathbb{R}$, który nie jest wartością typową funkcji f , nazywamy wartością bifurkacyjną funkcji f . Przez $B(f)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich wartości bifurkacyjnych funkcji f .

Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką.

Definicja

Powiemy, że funkcja f spełnia warunek Malgrange'a w punkcie y jeżeli istnieje otoczenie U punktu y oraz stałe $R, \delta > 0$ takie, że

$$(M) \quad |\nabla f(x)| |x| \geq \delta \quad \text{dla } x \in f^{-1}(U), \quad |x| > R.$$

Punkty $y \in \mathbb{R}$ w których funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a będziemy nazywać asymptotycznymi wartościami krytycznymi funkcji f . Zbiór wszystkich wartości asymptotycznych funkcji f będziemy oznaczać symbolem $K_\infty(f)$.

Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką, $a \in \mathbb{R}^n$.

Definicja

Powiemy, że funkcja f spełnia warunek ρ_a -regularności w punkcie y jeżeli istnieje otoczenie U punktu y oraz stała $R > 0$ taka, że

$$(N) \quad \nabla f(x) \neq t(x - a) \text{ dla } x \in f^{-1}(U), |x| > R, t \in \mathbb{R}.$$

Punkty $y \in \mathbb{R}$ w których funkcja f nie spełnia warunku ρ_a -regularności w punkcie y będziemy nazywać wartościami ρ_a -nieregularnymi funkcji f . Zbiór wszystkich wartości ρ_a -nieregularnymi funkcji f będziemy oznaczać symbolem $S_a(f)$.

Niech $K_0(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}^n \nabla f(x) = 0, y = f(x)\}$.

Twierdzenie (1)

$$B(f) \subset K_0(f) \cup K_\infty(f).$$

Twierdzenie (2)

$$B(f) \subset K_0(f) \cup \bigcap_{a \in \mathbb{R}^n} S_a(f).$$

Niech $K_0(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}^n \nabla f(x) = 0, y = f(x)\}$.

Twierdzenie (1)

$$B(f) \subset K_0(f) \cup K_\infty(f).$$

Twierdzenie (2)

$$B(f) \subset K_0(f) \cup \bigcap_{a \in \mathbb{R}^n} S_a(f).$$

Definicja

Niech $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką. Przez $\mathfrak{h}(f, D)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich pól wektorowych transwersalnych do poziomic funkcji $f \in C^\infty(D_f, \mathbb{R})$ na zbiorze otwartym $D \subset D_f$, to jest

$$\mathfrak{h}(f, D) := \{v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n) : D \subset D_v, \partial_{v(x)} f(x) \neq 0\}.$$

Definicja

Niech $v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ będzie gładkim polem wektorowym określonym na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^n$ i niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Określmy zbiory $\mathfrak{h}(v, D, A)$, $\mathfrak{h}(v, D)$ w następujący sposób

$$\mathfrak{h}(v, D, A) := \{f \in C^0(D_f) : D \subset D_f, f|_{D \setminus A} \in C^\infty(D \setminus A),$$

$$\partial_{v(x)} f(x) \neq 0 \text{ dla } x \in D \setminus A\},$$

$$\mathfrak{h}(v, D) := \mathfrak{h}(v, D, \emptyset).$$

Definicja

Niech $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką. Przez $\mathfrak{h}(f, D)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich pól wektorowych transwersalnych do poziomic funkcji $f \in C^\infty(D_f, \mathbb{R})$ na zbiorze otwartym $D \subset D_f$, to jest

$$\mathfrak{h}(f, D) := \{v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n) : D \subset D_v, \partial_{v(x)} f(x) \neq 0\}.$$

Definicja

Niech $v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ będzie gładkim polem wektorowym określonym na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^n$ i niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Określmy zbiory $\mathfrak{h}(v, D, A)$, $\mathfrak{h}(v, D)$ w następujący sposób

$$\mathfrak{h}(v, D, A) := \{f \in C^0(D_f) : D \subset D_f, f|_{D \setminus A} \in C^\infty(D \setminus A),$$

$$\partial_{v(x)} f(x) \neq 0 \text{ dla } x \in D \setminus A\},$$

$$\mathfrak{h}(v, D) := \mathfrak{h}(v, D, \emptyset).$$

Definicja

Niech $v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{H}(v, D)$, $y \in \mathbb{R}$. Dla $x \in D$ oznaczmy przez $\varphi_x : I_x \rightarrow D$ rozwiązanie integralne układu równań $x' = v(x)$ spełniające warunek początkowy $\varphi_x(0) = x$ i przyjmijmy

$$J_x := \{t \in I_x : \min\{f(x), y\} \leq f(\varphi_x(t)) \leq \max\{f(x), y\}\}.$$

Przez $[f, y]_v^D$ będziemy oznaczać zbiór funkcji $f^* \in \mathcal{H}(v, D, f^{-1}(y))$ takich, że dla dowolnego $x \in D$ funkcja

$$J_x \ni t \rightarrow f^*(\varphi_x(t)) \in \mathbb{R}$$

jest ograniczona.

Łatwo zauważamy, że $f \in [f, y]_v^D$.

Definicja

Niech $v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{H}(v, D)$, $y \in \mathbb{R}$. Dla $x \in D$ oznaczmy przez $\varphi_x : I_x \rightarrow D$ rozwiązanie integralne układu równań $x' = v(x)$ spełniające warunek początkowy $\varphi_x(0) = x$ i przyjmijmy

$$J_x := \{t \in I_x : \min\{f(x), y\} \leq f(\varphi_x(t)) \leq \max\{f(x), y\}\}.$$

Przez $[f, y]_v^D$ będziemy oznaczać zbiór funkcji $f^* \in \mathcal{H}(v, D, f^{-1}(y))$ takich, że dla dowolnego $x \in D$ funkcja

$$J_x \ni t \rightarrow f^*(\varphi_x(t)) \in \mathbb{R}$$

jest ograniczona.

Łatwo zauważamy, że $f \in [f, y]_v^D$.

Definicja

Rozważmy dowolną funkcję $h \in C^1(D_h)$, $D_h \subset \mathbb{R}^n$. Powiemy, że funkcja h ma własność właściwości na zbiorze $E \subset D_h$, jeżeli zachodzi warunek

$$(1) \quad \forall (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset E \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |h(x_k)| = +\infty.$$

Definicja

Oznaczmy przez Γ zbiór wszystkich trójek (v, h, f^*) , gdzie $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(D_h)$, $f^* \in C^0(D_{f^*})$ oraz D_v, D_h, D_{f^*} są podzbiarami otwartymi w $\mathbb{R}^n$.

Definicja

Przez $O_y(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$ dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki

- (i) $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$,
- (ii) h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$,
- (iii) $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$(2) \quad H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

jest funkcją ograniczoną.

Definicja

Oznaczmy przez Γ zbiór wszystkich trójek (v, h, f^*) , gdzie $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(D_h)$, $f^* \in C^0(D_{f^*})$ oraz D_v, D_h, D_{f^*} są podzbiarami otwartymi w $\mathbb{R}^n$.

Definicja

Przez $O_y(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$ dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki

- (i) $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$,
- (ii) h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$,
- (iii) $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$(2) \quad H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

jest funkcją ograniczoną.

Definicja

Oznaczmy przez Γ zbiór wszystkich trójek (v, h, f^*) , gdzie $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(D_h)$, $f^* \in C^0(D_{f^*})$ oraz D_v, D_h, D_{f^*} są podzbiarami otwartymi w $\mathbb{R}^n$.

Definicja

Przez $O_y(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$ dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki

- (i) $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$,
- (ii) h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$,
- (iii) $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$(2) \quad H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

jest funkcją ograniczoną.

Definicja

Oznaczmy przez Γ zbiór wszystkich trójek (v, h, f^*) , gdzie $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(D_h)$, $f^* \in C^0(D_{f^*})$ oraz D_v, D_h, D_{f^*} są podzbiarami otwartymi w $\mathbb{R}^n$.

Definicja

Przez $O_y(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$ dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki

- (i) $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$,
- (ii) h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$,
- (iii) $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$(2) \quad H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

jest funkcją ograniczoną.

Definicja

Oznaczmy przez Γ zbiór wszystkich trójek (v, h, f^*) , gdzie $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(D_h)$, $f^* \in C^0(D_{f^*})$ oraz D_v, D_h, D_{f^*} są podzbiarami otwartymi w $\mathbb{R}^n$.

Definicja

Przez $O_y(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$ dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki

- (i) $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$,
- (ii) h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$,
- (iii) $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$(2) \quad H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

jest funkcją ograniczoną.

Definicja

Oznaczmy przez Γ zbiór wszystkich trójek (v, h, f^*) , gdzie $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(D_h)$, $f^* \in C^0(D_{f^*})$ oraz D_v, D_h, D_{f^*} są podzbiarami otwartymi w $\mathbb{R}^n$.

Definicja

Przez $O_y(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$ dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki

- (i) $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$,
- (ii) h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$,
- (iii) $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$(2) \quad H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

jest funkcją ograniczoną.

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $y \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie (3)

Jeżeli $O_y(f) \neq \emptyset$, to punkt y jest wartością typową funkcji f . Dokładniej, istnieje wtedy otoczenie U punktu y oraz pole $v \in \mathfrak{m}(f, f^{-1}(U))$ takie, że trywializacja funkcji $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jest wyznaczona przez całkowanie pola v .

Twierdzenie (4)

Niech y będzie wartością typową funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Istnieje wtedy otoczenie U punktu y , pole $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ oraz funkcja $h \in C^\infty(f^{-1}(U))$ spełniająca warunek własności na zbiorze $f^{-1}(U)$ taka, że

$$(3) \quad H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} = 0,$$

dla $x \in f^{-1}(U)$. W szczególności zachodzi wtedy $O_y(f) \neq \emptyset$.

Twierdzenie (5)

Punkt y jest wartością typową funkcji f wtedy i tylko wtedy gdy $O_y(f) \neq \emptyset$.

Twierdzenie (4)

Niech y będzie wartością typową funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Istnieje wtedy otoczenie U punktu y , pole $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ oraz funkcja $h \in C^\infty(f^{-1}(U))$ spełniająca warunek własności na zbiorze $f^{-1}(U)$ taka, że

$$(3) \quad H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} = 0,$$

dla $x \in f^{-1}(U)$. W szczególności zachodzi wtedy $O_y(f) \neq \emptyset$.

Twierdzenie (5)

Punkt y jest wartością typową funkcji f wtedy i tylko wtedy gdy $O_y(f) \neq \emptyset$.

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

- 1 Funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w punkcie 0, co więcej $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, f) \notin O_0(f)$,
- 2 $((-2xy, 2x^2), \ln |(x, y)|^2, f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- 3 $(\nabla f, \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2), f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- 4 $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, y) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową.

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

- ❶ Funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w punkcie 0, co więcej $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, f) \notin O_0(f)$,
- ❷ $((-2xy, 2x^2), \ln |(x, y)|^2, f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- ❸ $(\nabla f, \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2), f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- ❹ $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, y) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową.

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

- ❶ Funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w punkcie 0, co więcej $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, f) \notin O_0(f)$,
- ❷ $((-2xy, 2x^2), \ln |(x, y)|^2, f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- ❸ $(\nabla f, \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2), f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- ❹ $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, y) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową.

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

- ❶ Funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w punkcie 0, co więcej $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, f) \notin O_0(f)$,
- ❷ $((-2xy, 2x^2), \ln |(x, y)|^2, f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- ❸ $(\nabla f, \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2), f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- ❹ $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, y) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową.

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

- ❶ Funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w punkcie 0, co więcej $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, f) \notin O_0(f)$,
- ❷ $((-2xy, 2x^2), \ln |(x, y)|^2, f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- ❸ $(\nabla f, \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \ln(x^2), f) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową,
- ❹ $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, y) \in O_0(f) \Rightarrow 0$ jest wartością typową.

Wniosek

Jeżeli y jest wartością typową funkcji f , to trywializację funkcji f możemy uzyskać całkując pole wektorowe $\nabla_g f$, gdzie g jest pewnym tensorem metrycznym w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(y)$.

Definicja

Niech $f_1, f_2 \in C^1(D)$ i niech $G \subset D$. Zbiorem Milnora odwzorowania $(f_1, f_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór punktów krytycznych odwzorowania $(f_1, f_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ i oznaczamy przez $M(f_1, f_2, G)$.

Twierdzenie (6)

Niech $y \in \mathbb{R}$ będzie wartością regularną funkcji f , $U_0 \subset \mathbb{R}$ otoczeniem punktu y , $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym i $h \in C^1(D_h)$ funkcją posiadającą własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U_0) \setminus K_0$. Wtedy

- a) jeżeli istnieje otoczenie $U \subset U_0$ punktu y takie, że zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest ograniczony to punkt y jest wartością typową funkcji f ,
- b) jeżeli $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony dla pewnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y i istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ taki, że funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest ograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$ to punkt y jest wartością typową funkcji f ,
- c) jeżeli dla dowolnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony oraz dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest nieograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ to dla dowolnego pola $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ zachodzi $(v, h, f) \notin O_y(f)$.

Twierdzenie (6)

Niech $y \in \mathbb{R}$ będzie wartością regularną funkcji f , $U_0 \subset \mathbb{R}$ otoczeniem punktu y , $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym i $h \in C^1(D_h)$ funkcją posiadającą własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U_0) \setminus K_0$. Wtedy

a) jeżeli istnieje otoczenie $U \subset U_0$ punktu y takie, że zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest ograniczony to punkt y jest wartością typową funkcji f ,

b) jeżeli $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony dla pewnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y i istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ taki, że funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest ograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$ to punkt y jest wartością typową funkcji f ,

c) jeżeli dla dowolnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony oraz dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest nieograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ to dla dowolnego pola $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ zachodzi $(v, h, f) \notin O_y(f)$.

Twierdzenie (6)

Niech $y \in \mathbb{R}$ będzie wartością regularną funkcji f , $U_0 \subset \mathbb{R}$ otoczeniem punktu y , $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym i $h \in C^1(D_h)$ funkcją posiadającą własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U_0) \setminus K_0$. Wtedy

- a) jeżeli istnieje otoczenie $U \subset U_0$ punktu y takie, że zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest ograniczony to punkt y jest wartością typową funkcji f ,
- b) jeżeli $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony dla pewnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y i istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ taki, że funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest ograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$ to punkt y jest wartością typową funkcji f ,
- c) jeżeli dla dowolnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony oraz dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest nieograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ to dla dowolnego pola $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ zachodzi $(v, h, f) \notin O_y(f)$.

Twierdzenie (6)

Niech $y \in \mathbb{R}$ będzie wartością regularną funkcji f , $U_0 \subset \mathbb{R}$ otoczeniem punktu y , $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym i $h \in C^1(D_h)$ funkcją posiadającą własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U_0) \setminus K_0$. Wtedy

- a) jeżeli istnieje otoczenie $U \subset U_0$ punktu y takie, że zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest ograniczony to punkt y jest wartością typową funkcji f ,
- b) jeżeli $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony dla pewnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y i istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ taki, że funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest ograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$ to punkt y jest wartością typową funkcji f ,
- c) jeżeli dla dowolnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony oraz dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest nieograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ to dla dowolnego pola $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ zachodzi $(v, h, f) \notin O_y(f)$.

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) := y(2x^2y^2 - 9xy + 12) \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) := y(2x^2y^2 - 9xy + 12) \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

- 1 Funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w 0, co więcej $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, f) \notin O_0(f)$,
- 2 funkcja f nie spełnia warunku ρ_a -regularności w 0 dla dowolnego punktu $a \in \mathbb{R}^2$,
- 3 funkcja $h(x, y) = \frac{x^2}{2x^2y^2 - 9xy + 12}$ ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(-1, 1)$ oraz $M(f, h, f^{-1}(-1, 1)) = \emptyset$. Zatem na mocy twierdzenia (6) punkt 0 jest wartością typową funkcji f .

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) := y(2x^2y^2 - 9xy + 12) \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

- 1 Funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w 0, co więcej $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, f) \notin O_0(f)$,
- 2 funkcja f nie spełnia warunku ρ_a -regularności w 0 dla dowolnego punktu $a \in \mathbb{R}^2$,
- 3 funkcja $h(x, y) = \frac{x^2}{2x^2y^2 - 9xy + 12}$ ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(-1, 1)$ oraz $M(f, h, f^{-1}(-1, 1)) = \emptyset$. Zatem na mocy twierdzenia (6) punkt 0 jest wartością typową funkcji f .

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) := y(2x^2y^2 - 9xy + 12) \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

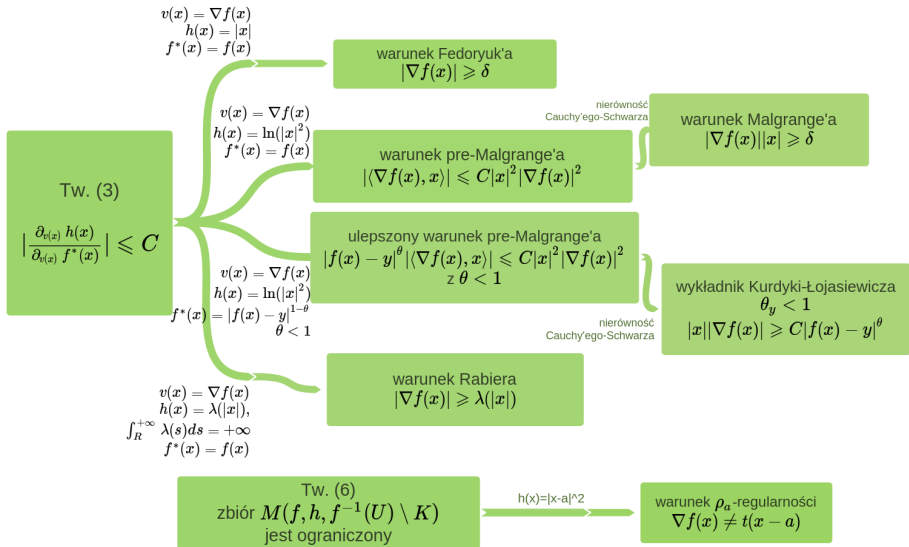
- 1 Funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w 0, co więcej $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, f) \notin O_0(f)$,
- 2 funkcja f nie spełnia warunku ρ_a -regularności w 0 dla dowolnego punktu $a \in \mathbb{R}^2$,
- 3 funkcja $h(x, y) = \frac{x^2}{2x^2y^2 - 9xy + 12}$ ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(-1, 1)$ oraz $M(f, h, f^{-1}(-1, 1)) = \emptyset$. Zatem na mocy twierdzenia (6) punkt 0 jest wartością typową funkcji f .

Przykład

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) := y(2x^2y^2 - 9xy + 12) \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

- 1 Funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w 0, co więcej $(\nabla f, \ln |(x, y)|^2, f) \notin O_0(f)$,
- 2 funkcja f nie spełnia warunku ρ_a -regularności w 0 dla dowolnego punktu $a \in \mathbb{R}^2$,
- 3 funkcja $h(x, y) = \frac{x^2}{2x^2y^2 - 9xy + 12}$ ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(-1, 1)$ oraz $M(f, h, f^{-1}(-1, 1)) = \emptyset$. Zatem na mocy twierdzenia (6) punkt 0 jest wartością typową funkcji f .



Definicja

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym. Ustalmy funkcję $h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ posiadającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$ oraz pole wektorowe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przyjmijmy

$$\Sigma^v(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_v f(x) = 0\},$$

$$K_\infty^v(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k) \subset \Sigma^v(f)} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\},$$

$$H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus (K \cup \Sigma_v(f)),$$

$$K_\infty^{v,h,H}(f) := \{y \in \mathbb{R} \setminus K_\infty^v(f) : \exists_{(x_k) \subset \mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |H(x_k)| = +\infty\},$$

$$K_\infty^{v,h}(f) := K_\infty^{v,h,H}(f) \cup K_\infty^v(f).$$

Definicja

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym. Ustalmy funkcję $h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ posiadającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$ oraz pole wektorowe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przyjmijmy

$$\Sigma^v(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_v f(x) = 0\},$$

$$K_\infty^v(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k) \subset \Sigma^v(f)} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\},$$

$$H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus (K \cup \Sigma_v(f)),$$

$$K_\infty^{v,h,H}(f) := \{y \in \mathbb{R} \setminus K_\infty^v(f) : \exists_{(x_k) \subset \mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |H(x_k)| = +\infty\},$$

$$K_\infty^{v,h}(f) := K_\infty^{v,h,H}(f) \cup K_\infty^v(f).$$

Definicja

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym. Ustalmy funkcję $h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ posiadającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$ oraz pole wektorowe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przyjmijmy

$$\Sigma^v(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_v f(x) = 0\},$$

$$K_\infty^v(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k) \subset \Sigma^v(f)} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\},$$

$$H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus (K \cup \Sigma_v(f)),$$

$$K_\infty^{v,h,H}(f) := \{y \in \mathbb{R} \setminus K_\infty^v(f) : \exists_{(x_k) \subset \mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |H(x_k)| = +\infty\},$$

$$K_\infty^{v,h}(f) := K_\infty^{v,h,H}(f) \cup K_\infty^v(f).$$

Definicja

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym. Ustalmy funkcję $h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ posiadającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$ oraz pole wektorowe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przyjmijmy

$$\Sigma^v(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_v f(x) = 0\},$$

$$K_\infty^v(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k) \subset \Sigma^v(f)} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\},$$

$$H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus (K \cup \Sigma_v(f)),$$

$$K_\infty^{v,h,H}(f) := \{y \in \mathbb{R} \setminus K_\infty^v(f) : \exists_{(x_k) \subset \mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |H(x_k)| = +\infty\},$$

$$K_\infty^{v,h}(f) := K_\infty^{v,h,H}(f) \cup K_\infty^v(f).$$

Definicja

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym. Ustalmy funkcję $h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ posiadającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$ oraz pole wektorowe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przyjmijmy

$$\Sigma^v(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_v f(x) = 0\},$$

$$K_\infty^v(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k) \subset \Sigma^v(f)} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\},$$

$$H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus (K \cup \Sigma_v(f)),$$

$$K_\infty^{v,h,H}(f) := \{y \in \mathbb{R} \setminus K_\infty^v(f) : \exists_{(x_k) \subset \mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |H(x_k)| = +\infty\},$$

$$K_\infty^{v,h}(f) := K_\infty^{v,h,H}(f) \cup K_\infty^v(f).$$

Definicja

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym. Ustalmy funkcję $h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ posiadającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$ oraz pole wektorowe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przyjmijmy

$$\Sigma^v(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_v f(x) = 0\},$$

$$K_\infty^v(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k) \subset \Sigma^v(f)} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\},$$

$$H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus (K \cup \Sigma_v(f)),$$

$$K_\infty^{v,h,H}(f) := \{y \in \mathbb{R} \setminus K_\infty^v(f) : \exists_{(x_k) \subset \mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |H(x_k)| = +\infty\},$$

$$K_\infty^{v,h}(f) := K_\infty^{v,h,H}(f) \cup K_\infty^v(f).$$

Wniosek

$$B_{\infty}(f) \subset K_{\infty}^{v,h}(f).$$

Twierdzenie (7)

Jeżeli funkcja f jest wielomianem, funkcja H jest funkcją wymierną i pole v spełnia warunek

$$v(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x) = 0$$

to zbiór $K_{\infty}^{v,h}(f)$ jest efektywnie wyznaczalny.

Wniosek

$$B_{\infty}(f) \subset K_{\infty}^{v,h}(f).$$

Twierdzenie (7)

Jeżeli funkcja f jest wielomianem, funkcja H jest funkcją wymierną i pole v spełnia warunek

$$v(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x) = 0$$

to zbiór $K_{\infty}^{v,h}(f)$ jest efektywnie wyznaczalny.