

O RESIDUACH FORM MEROMORFICZNYCH

A. Płoski (Kielce)

0. Wstęp. Residuum $\text{res}_0 \left(\frac{h(z)}{f(z)} dz \right)$ formy meromorficznej definiowane zwykle przy pomocy całki lub rozwinięcia Laurenta spełnia związek

$$\text{res}_0 \left(\frac{h(z)}{f(z)} dz \right) = \lim_{w \rightarrow 0} \left(\sum \frac{h(z)}{f(z)} \right),$$

gdzie sumowanie dotyczy rozwiązań $f(z) = w$ leżących dostatecznie blisko zera.

Formuła powyższa pozwala przenieść pojęcie residuum na przypadek wielowymiarowy bez odwoływania się do teorii całkowania na rozmaitościach (por. [3], [4]) lub zaawansowanych środków algebry przemiennej (por. [9], [5]). Ujęcie takie podejmowane przez różnych autorów zostało naszkicowane w monografii [1]. Wbrew tradycji wykładu jednowymiarowego mówimy tutaj o residuum formy różniczkowej a nie o residuum funkcji, gdyż to drugie pojęcie nie ma charakteru niezmienniczego i może powodować zamieszanie już w teorii funkcji na $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup (\infty)$.

Celem tego artykułu jest krótkie przedstawienie najważniejszych własności residuów oraz wskazanie pewnych zastosowań w geometrii analitycznej zespolonej. Inne ciekawe zastosowania Czytelnik znajdzie w cytowanej literaturze.

1. Podstawowe własności residuów. Rozważmy odwzorowanie holomorficzne właściwe $f = (f_1, \dots, f_n)$ obszaru U przestrzeni $\mathbb{C}^n$ w obszar V tej samej przestrzeni. Wówczas f jest nakryciem analitycznym, dokładniej, jeżeli $S = \{z \in U : J_f(z) = 0\}$ (oznaczamy: $J_f = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right)$) jest zbiorem punktów krytycznych f , to S i $f(S)$ są zbiorami analitycznymi odpowiednio w U i V , a odwzorowanie indukowane $U' \ni z \rightarrow f(z) \in V'$ obszaru $U' = U \setminus S$ w obszar $V' = V \setminus f(S)$ jest nakryciem topologicznym. Co więcej f ma skończone włókna.

TWIERDZENIE (1.1) (O ODWROTNOŚCI JAKOBIANU). Przy podanych wyżej oznaczeniach i założeniach, dla każdej funkcji h holomorficznej w obszarze U funkcja

$$V - f(S) \ni w \rightarrow \sum_{z \in f^{-1}(w)} \frac{h(z)}{J_f(z)} \in \mathbb{C}$$

przedłuża się do funkcji holomorficznej w obszarze V .

Dowód powyższego twierdzenia Czytelnik znajdzie w monografii [1]. Tutaj zauważymy tylko, że holomorficzność funkcji $\sum_{z \in f^{-1}(w)} \frac{h(z)}{J_f(z)}$ w obszarze $V - f(S)$ jest łatwą konsekwencją klasycznego twierdzenia o funkcjach uwikłanych, istota problemu polega więc na przedłużeniu funkcji na zbiór $f(S)$. Standardowe rozumowanie oparte na twierdzeniu Riemanna zawodzi, gdyż nie jest tu łatwo sprawdzić lokalną ograniczoność w punktach $f(S)$.

Niech teraz $f = (f_1, \dots, f_n)$ będzie odwzorowaniem holomorficznym pewnego obszaru przestrzeni $\mathbb{C}^n$ w tę przestrzeń i niech z_0 będzie zerem izolowanym odwzorowania f . Wówczas istnieją

dowolnie małe otoczenia U_{z_0}, V_0 punktu z_0 i 0 takie, że odwzorowanie $U_{z_0} \ni z \rightarrow f(z) \in V_0$ jest właściwe, a f nie ma w U_{z_0} innych zer oprócz z_0 .

DEFINICJA (1.2). Dla każdej funkcji h holomorficznej w otoczeniu z_0 definiujemy:

$$\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{h}{f_1 \dots f_n} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \right) = \lim_{f(S) \ni w \rightarrow 0} \left(\sum_{z \in f^{-1}(w)} \frac{h(z)}{J_f(z)} \right).$$

W powyższej definicji S jest zbiorem punktów krytycznych f . Gdy z_0 jest punktem regularnym f , to oczywiście

$$\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{h}{f_1 \dots f_n} dz \right) = \frac{h(z_0)}{J_f(z_0)}.$$

Tutaj i dalej oznaczamy $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$.

Z definicji residuum oraz z twierdzenia o odwrotności jacobianu wynika łatwo następujący

WNIOSEK (1.3). Jeżeli $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow V$ jest właściwym odwzorowaniem holomorficznym obszarów przestrzeni $\mathbb{C}^n$, to funkcja

$$w \mapsto \sum_{z \in f^{-1}(w)} \operatorname{res}_z \left(\frac{h}{(f_1 - w_1) \dots (f_n - w_n)} dz \right)$$

jest holomorficzna w obszarze V .

Zestawione niżej własności lokalne residuów są trudniejsze do udowodnienia (por. [1], Chap. I). Dla ustalenia uwagi zakładamy, że wszystkie funkcje występujące niżej są holomorficzne w otoczeniu zera $0 \in \mathbb{C}^n$, a odwzorowania $f = (f_1, \dots, f_n)$ oraz $g = (g_1, \dots, g_n)$ mają w tym punkcie zero izolowane.

I. Jeżeli $h = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ (współczynniki $a_1, \dots, a_n$ holomorficzne), to

$$\operatorname{res}_0 \left(\frac{h}{f_1 \dots f_n} dz \right) = 0.$$

II. Jeżeli $g_1 = a_{11} f_1 + \dots + a_{1n} f_n$, $a = \det (a_{ij})$, to

$$\operatorname{res}_0 \left(\frac{h}{f_1 \dots f_n} dz \right) = \operatorname{res}_0 \left(\frac{ah}{g_1 \dots g_n} dz \right).$$

III. Jeżeli $\operatorname{res}_0 \left(\frac{hh'}{f_1 \dots f_n} dz \right) = 0$ dla wszystkich h' holomorficznych w otoczeniu zera, to $h = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ dla pewnych holomorficznych współczynników $a_1, \dots, a_n$.

Własności I i III dają łącznie twierdzenie o lokalnej dwiistości, własność II jest nazywana formułą transformacji (ang. transformation formula). Ostatnio G. Biernat podał w pracy [2] interesującą formułę pozwalającą sprowadzić obliczenie residuum do przypadku jednowymiarowego. Formuła ta implikuje własność I i być może okaże się użyteczna w podaniu prostych dowodów pozostałych dwóch własności.

UWAGA. W pracy [6] J. Lipman i B. Teissier, stosując przedstawienie całkowite residuum, udowodnili następującą wersję twierdzenia Skody-Briancona:

jeżeli gradient $\operatorname{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n} \right)$ funkcji holomorficznej h ma zero izolowane w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$, to

$$h^n = a_1 \frac{\partial h}{\partial z_1} + \dots + a_n \frac{\partial h}{\partial z_n}$$

($a_1, \dots, a_n$ holomorficzne w otoczeniu 0).

Byłoby rzeczą ciekawą udowodnić powyższe twierdzenie bez odwoływania się do przedstawienia całkowego.

2. Twierdzenia typu Maxa Noethera. Będziemy stosowali standardowe oznaczenia: $\text{ord}_{z_0} h$ to rząd funkcji holomorficznej h w punkcie z_0 , $\text{in}_{z_0} h$ to forma początkowa (=forma jednořodna rozpoczynająca rozwinięcie Taylora funkcji h wokół z_0), gdy h jest wielomianem, to jego stopień oznaczamy $\deg h$. Niech $f = (f_1, \dots, f_n)$ będzie odwzorowaniem holomorficznym posiadającym zero izolowane w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}^n$. Z lokalnego twierdzenia Hilberta o zerach wynika istnienie liczby całkowitej $\rho > 0$ takiej, że dla każdej funkcji holomorficznej h w otoczeniu z_0 , znikającej w z_0 , zachodzi relacja $h^\rho = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ ($a_1, \dots, a_n$ holomorficzne w otoczeniu z_0). Najmniejszą liczbę ρ o tej własności nazywamy wykładnikiem Noethera odwzorowania f w punkcie z_0 i oznaczamy $\rho_{z_0}(f)$. Łatwo dowodzi się, że zachodzi

WŁASNOŚĆ (2.1). Wykładnik $\rho_{z_0}(f)$ jest najmniejszą liczbą całkowitą $\rho > 0$ taką, że dla każdej funkcji holomorficznej h , jeśli $\text{ord}_{z_0} h \geq \rho$, to $h = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ ($a_1, \dots, a_n$ holomorficzne w otoczeniu z_0).

Dalej dla ustalenia uwagi przyjmujemy $z_0 = 0$. Mamy następujące:

TWIERDZENIE (2.2). Niech $f = (f_1, \dots, f_n)$ będzie odwzorowaniem holomorficznym o zerze izolowanym w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$. Wtedy

(a) $\rho_0(f) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $J_f(0) \neq 0$.

(b) $\rho_0(f) \geq \text{ord}_0 J_f + 1$.

(c) $\rho_0(f) \geq \sum_{i=1}^n (\text{ord}_0 f_i - 1) + 1$, równość zachodzi wtedy i

tylko wtedy, gdy odwzorowanie $(\text{in}_0 f_1, \dots, \text{in}_0 f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ma zero izolowane w $0 \in \mathbb{C}^n$.

D o w ó d. Własność (a) wynika łatwo z twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Aby sprawdzić (b) zauważmy, że

$$\text{res}_0 \left(\frac{J_f}{f_1 \dots f_n} dz \right) = \text{krotność } f \text{ w } 0 \in \mathbb{C}^n \neq 0,$$

a więc na mocy własności I residuów, nie istnieje relacja postaci $J_f = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ ($a_1, \dots, a_n$ holomorficzne w otoczeniu 0); zatem nie może być $\text{ord}_0 J_f \geq \rho_0(f)$, stąd (b). Nierówność w warunku (c) wynika z (b), ponieważ $\text{ord}_0 J_f \geq \sum_{i=1}^n (\text{ord}_0 f_i - 1)$. Dowód warunku charakteryzującego równość podany jest w pracy [7].

Niech teraz $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym i niech I_f będzie ideałem pierścienia wielomianów generowanym przez składowe $f_1, \dots, f_n$. Ideał I_f składa się więc z wielomianów postaci $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$, gdzie $a_1, \dots, a_n$ są wielomianami. Mówimy, że wielomian h spełnia warunek Noethera względem f w punkcie $z_0 \in f^{-1}(0)$, gdy $h = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ dla pewnych funkcji $a_1, \dots, a_n$ holomorficznych w otoczeniu z_0 . Przypomnijmy dobrze znane, klasyczne

TWIERDZENIE NOETHERA (2.3). Niech $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym takim, że zbiór $f^{-1}(0)$ jest skończony. Jeżeli wielomian h spełnia warunek Noethera względem f w każdym punkcie $z_0 \in f^{-1}(0)$, to $h \in I_f$.

Z powyższego twierdzenia oraz z definicji wykładnika Noethera łatwo wynika

WNIOSEK (2.4). Dla każdego wielomianu h zerującego się na $f^{-1}(0)$ mamy

$$\max_h (\rho_{z_0}(f)) = I_f.$$

Co więcej, $\max (\rho_{z_0}(f))$ jest najmniejszą liczbą całkowitą $\rho > 0$ taką, że $h^\rho \in I_f$.

UWAGA. Stosując twierdzenie Bézouta oraz łatwą do sprawdzenia nierówność $\rho_{z_0}(f) \leq$ (krotność f w punkcie z_0) sprawdzamy, że $\rho_{z_0}(f) \leq \prod_{i=1}^n \deg f_i$. Nie wiem, czy to oszacowanie jest optymalne. Dokładniej, czy dla dowolnych liczb całkowitych $d_1, \dots, d_n > 0$ istnieje odwzorowanie wielomianowe $f = (f_1, \dots, f_n)$ takie, że $\deg f_i = d_i$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz $\rho_0(f) = \prod_{i=1}^n d_i$?

3. Twierdzenie Eulera-Jacobiego i jego uogólnienia. Dla każdego wielomianu n zmiennych $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ (wielomian P utożsamiamy z odwzorowaniem $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$) oznaczamy $\tilde{P}$ jego "ujednorodnienie", zatem $\tilde{P} \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_n]$ jest formą jednorodną stopnia $\deg P$ taką, że $P(z_0, z_1, \dots, z_n) = z_0^{\deg P} \tilde{P}(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0})$. Symbolem P^+ oznaczamy sumę jednomianów stopnia $\deg P$ występujących w wielomianie P . Przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^n$ będziemy rozważać jako przestrzeń $\mathbb{C}^n$ z dołączoną hyperpłaszczyzną $z_0 = 0$. Równanie $P^+ = 0$ określa w $\mathbb{P}^n$ część wspólną hyperpowierzchni $\tilde{P} = 0$ i hyperpłaszczyzny $z_0 = 0$.

Jeżeli $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest odwzorowaniem wielomianowym, to warunek "hyperpowierzchnie $\tilde{f}_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) nie mają wspólnych punktów w nieskończoności" oznacza, że układ równań $f_i^+ = 0$ ($1 \leq i \leq n$) ma wyłącznie rozwiązanie $(0, \dots, 0)$.

TWIERDZENIE (3.1) (Eulera-Jacobiego). Niech $f = (f_1, \dots, f_n)$ będzie odwzorowaniem wielomianowym przestrzeni $\mathbb{C}^n$ spełniającym warunki:

- (i) 0 jest wartością regularną f ,
- (ii) hyperpowierzchnie $\tilde{f}_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) nie mają wspólnych punktów w nieskończoności.

Wtedy dla każdego wielomianu h takiego, że $\deg h \leq$

$$\sum_{i=1}^n (\deg f_i - 1) - 1 \text{ spełniona jest równość}$$

$$\sum_{z \in f^{-1}(0)} \frac{h(z)}{J_f(z)} = 0.$$

D o w ó d (Chowański). Rozważmy odwzorowanie wielomianowe $g : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ dane wzorem $g(z_0, z) = (\tilde{f}_1(z_0, z), \dots, \tilde{f}_n(z_0, z), z_0)$. Punkty postaci $(t, 0)$ ($t \neq 0$) są wartościami regularnymi odwzorowania g i jak łatwo sprawdzić

$$\sum_{(z_0, z) \in g^{-1}(t, 0)} \frac{\tilde{h}(z_0, z)}{J_g(z_0, z)} = t \quad \deg h - \sum_{i=1}^n (\deg f_i - 1) \quad \sum_{z \in f^{-1}(0)} \frac{h(z)}{J_f(z)}$$

Z wniosku (1.3) i z twierdzenia o odwrotności jacobianu wynika, że rozważana suma jest funkcją holomorficzną dla $t \neq 0$, a więc ma granicę, gdy $t \rightarrow 0$. Ponieważ $\deg h - \sum_{i=1}^n (\deg f_i - 1) < 0$, zatem musi być

$$\sum_{z \in f^{-1}(0)} \frac{h(z)}{J_f(z)} = 0.$$

Twierdzenie Eulera-Jacobiego ma wiele interesujących zastosowań (por. [3], [4], [5]), nad którymi nie będziemy się tutaj zatrzymywać. Jak pokazał Ph. Griffiths założenie (i) można opuścić, jeśli stosownie określić sumę $\sum h(z)/J_f(z)$.

TWIERDZENIE (3.2) (wersja Griffithsa twierdzenia Eulera - - Jacobiego). Zakładamy, że hyperpowierzchnie $F_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) nie mają wspólnych punktów w nieskończoności. Wtedy

$$\sum_{z \in f^{-1}(0)} \operatorname{res}_z \left(\frac{h}{f_1 \cdots f_n} dz \right) = 0$$

dla wszystkich wielomianów h spełniających warunek $\deg h \leq \sum_{i=1}^n (\deg f_i - 1) - 1$.

D o w ó d. Z założenia o braku wspólnych punktów w nieskończoności wynika właściwość $f = (f_1, \dots, f_n)$. Na mocy (1.3) funkcja $w \mapsto \sum \operatorname{res}_z \left(\frac{h}{(f_1 - w_1) \cdots (f_n - w_n)} dz \right)$ jest funkcją holomorficzną, z twierdzenia (3.1) wynika, że funkcja ta jest równa zeru na zbiorze wartości regularnych odwzorowania f , stąd jest ona równa tożsamościowo zeru.

Aby podać zastosowanie twierdzenia (3.2) w geometrii rzutowej przypomnijmy kilka definicji.

Hyperpowierzchnią $F = 0$ w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n$ nazywamy zbiór form jednorodnych postaci cF ($c \neq 0$). Jeżeli $z = (z_1, \dots, z_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest mapą afiniczną (zatem U jest zbiorem otwartym w $\mathbb{P}^n$ powstałym przez usunięcie hyperpłaszczyzny $L = 0$), to równanie $F/L^m = 0$ ($m = \deg F$) nazywamy równaniem hyperpowierzchni $F = 0$ w zbiorze U . Rozważmy teraz układ hyperpowierzchni $F_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) przecinających się w skończonym zbiorze punktów $S \subset \mathbb{P}^n$. Formę wymierną Ω na przestrzeni $\mathbb{P}^n$ nazywamy stowarzyszoną z układem $F_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$), jeżeli dla każdej mapy afinicznej $z : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest $\Omega = \frac{h}{f_1 \cdots f_n} dz$, gdzie $f_i = 0$ jest równaniem hyperpowierzchni $F_i = 0$ w zbiorze

rze U . Jeżeli $p \rightarrow S$ i mapa $z : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest tak dobrana, że punkt p ma współrzędne afiniczne $(0, \dots, 0)$, to przyjmujemy $\text{res}_p \Omega = \text{res}_0 \left(\frac{h}{f_1 \dots f_n} dz \right)$. Określenie to nie zależy od wyboru mapy.

TWIERDZENIE (3.3) (o residuach). Jeżeli Ω jest formą wymierną w $\mathbb{P}^n$ stowarzyszoną z układem hyperpowierzchni $F_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) przecinających się w zbiorze skończonym S , to

$$\sum_{p \in S} \text{res}_p \Omega = 0.$$

Dowód powyższego twierdzenia otrzymujemy z twierdzenia (3.2) sprawdzając, że jeśli $z : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest mapą afiniczną taką, że $S \subset U$, to w mapie tej $\Omega = \frac{h}{f_1 \dots f_n} dz$, gdzie $\deg h \leq \sum_{i=1}^n (\deg f_i - 1) - 1$. Twierdzenie (3.3) uogólnia się na formy meromorficzne na zwartych rozmaitościach holomorficznych, wymaga to użycia twierdzenia Stokesa (por. [4]).

W związku z twierdzeniem Eulera-Jacobiego Profesor Z. Chaczyński postawił następujące pytanie: dla jakich wielomianów h spełniona jest formuła $\sum \frac{h(z)}{J_f(z)} = 0$, gdy hyperpowierzchnie $F_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) mają wspólne punkty w nieskończoności? Pewne twierdzenia związane z tym pytaniem otrzymali G. Biernat i autor. Aby przedstawić tu główny rezultat pracy [8] dla każdego odwzorowania wielomianowego $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ o skończonym włóknie $f^{-1}(0)$ wprowadzamy oznaczenie:

$$\rho(f) = \max \{ \rho : \deg h \leq \rho \}$$

$$\Rightarrow \sum_{z \in f^{-1}(0)} \text{res}_z \left(\frac{h}{f_1 \dots f_n} dz \right) = 0.$$

Jeżeli hyperpowierzchnie $\bar{f}_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) nie mają wspólnych punktów w nieskończoności, to z twierdzenia (3.2) wynika, że $\rho(f) = \sum_{i=1}^n (\deg f_i - 1) - 1$. Ponadto łatwo sprawdzić, że $\rho(f) \leq \deg J_f - 1 \leq \sum (\deg f_i - 1) - 1$. Charakterystyka $\rho(f)$ jest więc "globalnym" odpowiednikiem wykładnika Noethera. Załóżmy teraz, że hyperpowierzchnie $\bar{f}_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) przecinają się w nieskończoności w skończonym zbiorze punktów S_∞ i dla każdego $p \in S_\infty$ oznaczmy $\rho_p =$ wykładnik Noethera hyperpowierzchni $\bar{f}_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) w punkcie p . Oczywiście wykładnik ρ_p definiujemy jako wykładnik odwzorowania holomorficznego utworzonego przez zestawienie równań afinicznych rozważanych hyperpowierzchni w pewnej mapie afinicznej wokół punktu p .

TWIERDZENIE (3.4) (por. [8]). Przy wprowadzonych oznaczeniach i założeniach: $\rho(f) \geq \sum_{i=1}^n (\deg f_i - 1) - 1 - \max_{p \in S_\infty} (\rho_p)$.

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na twierdzeniu o residuach; wykładnik Noethera pozwala sformułować prosty warunek dostateczny na to, by residua w nieskończoności zniknęły.

Zanotujmy jeszcze dwa wnioski z podanego twierdzenia.

WNIOSEK (3.5). Jeżeli hyperpowierzchnie $\bar{f}_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) przecinają się transversalnie (= z krotnością 1) we wszystkich punktach w nieskończoności, to $\rho(f) \geq \sum_{i=1}^n (\deg f_i - 1) - 2$.

WNIOSEK (2.6). Jeżeli hyperpowierzchnie $\bar{f}_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) nie mają w nieskończoności wspólnej stycznej (tzn. w punktach $p \in S_\infty$ stożki styczne do hyperpowierzchni mają tylko wierzchołek wspólny) i żadna z hyperpowierzchni $\bar{f}_i = 0$ nie jest układem

hyperpłaszczyzn przechodzących przez punkt $p \in S_\infty$, to $\rho(f) \geq n - 2$.

Drugie założenie wniosku (3.6) jest istotne: odwzorowanie $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dane wzorem $f(x,y) = (y^m - 1, xy + y^n)$ ($m \geq 1, n \geq 2$) spełnia tylko pierwsze założenie i $\rho(f) = -1$ ($\rho(f) = -1$ oznacza, że jedynym wielomianem spełniającym relację Eulera-Jacobiego jest wielomian zerowy). Zauważmy jeszcze, że jeśli odwzorowanie f spełnia założenia wniosku (3.6), to $\deg J_f \geq \rho(f) + 1 = n - 1$.

UWAGA. Z twierdzenia (3.4) wynika oszacowanie $\rho(f) \leq \sum_{i=1}^n (\deg f_i - 1) - 1 + \mu(f) - \prod_{i=1}^n \deg f_i$ ($\mu(f) = \sum_{z \in f^{-1}(0)} \text{mult}_z f$) będące odpowiednikiem oszacowania Bertiniego dla wykładnika Noether'a (por. [7]). Czy oszacowanie to jest prawdziwe bez założenia, że hyperpowierzchnie $\tilde{f}_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) przecinają się w nieskończoności w skończonej liczbie punktów?

Spis literatury

- [1] V. Arnold, S. Gusein-Zade, A. Varchenko, Singularities of Differentiable Maps, vol. I, Boston 1985.
- [2] G. Biernat, La représentation paramétrique d'un résidu multidimensionnel, (w przygotowaniu).
- [3] Ph. Griffiths, Variations on a Theorem of Abel, Invent. math. 35 (1976), 321-390.
- [4] Ph. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, New York 1978.
- [5] M. Kreuzer, E. Kunz, Traces in strict Frobenius algebras and strict complete intersections, J. Reine Angew. Math. 381 (1987), 181-204.
- [6] J. Lipman, B. Teissier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, Michigan Math. J. 28 (1981), 97-116.

- [7] A. Płoski, On the Noether exponent, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź, No. 72, (w druku).
- [8] —, Note on the Euler-Jacobi formula, (w przygotowaniu).
- [9] G. Scheja, U. Storch, Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten, J. Reine Angew. Math. 278/279 (1975), 174-190.
- [10] A. Tsikh, Generalization of Bertini's Theorem on the index of a primary ideal in the ring O_a , Uspekhi Mat. Nauk 40 (2) (1985), 205-206, (po rosyjsku).

Sulejów, 16-21 stycznia 1989 r.