

# Liczba Milnora liniowych deformacji o zadanym rzędzie

Aleksandra Zakrzewska

Wydział Matematyki i Informatyki UŁ

XLVI konferencja i Warsztaty "Geometria Analityczna i  
Algebraiczna"  
Styczeń 2026

Niech  $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  będzie **osobliwością izolowaną**.

Niech  $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  będzie **osobliwością izolowaną**.

## Definicja

**Deformacją osobliwości**  $f_0$  nazywamy kulek funkcji holomorficznej  $f = f(s, z) : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  taki, że

- 1  $f(0, z) = f_0(z),$
- 2  $f(s, 0) = 0.$

Niech  $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  będzie **osobliwością izolowaną**.

## Definicja

**Deformacją osobliwości**  $f_0$  nazywamy kulek funkcji holomorficznej  $f = f(s, z) : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  taki, że

- 1  $f(0, z) = f_0(z)$ ,
- 2  $f(s, 0) = 0$ .

Deformacje  $f(s, z)$  osobliwości  $f_0$  traktujemy jako rodzinę  $(f_s)$  funkcji,  $f_s(z) := f(s, z)$ .

Niech  $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  będzie **osobliwością izolowaną**.

## Definicja

**Deformacją osobliwości**  $f_0$  nazywamy kulek funkcji holomorficznej  $f = f(s, z) : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  taki, że

- 1  $f(0, z) = f_0(z)$ ,
- 2  $f(s, 0) = 0$ .

Deformacje  $f(s, z)$  osobliwości  $f_0$  traktujemy jako rodzinę  $(f_s)$  funkcji,  $f_s(z) := f(s, z)$ . Deformację postaci  $f_s = f_0 + sg$  nazywamy **deformacją liniową**.

## Definicja

*Ponieważ  $f_0$  jest izolowaną osobliwością,  $f_s$  ma tylko izolowane osobliwości blisko 0, dla wystarczająco małych  $s$ . Zatem dla wystarczająco małych  $s$  możemy zdefiniować liczbę  $\mu_s$*

$$\mu_s := \mu(f_s) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_2 / (\nabla f_s),$$

*zwaną **liczbą Milnora**  $f_s$ , gdzie  $\mathcal{O}_2$  jest pierścieniem kielków funkcji holomorficznych określonych w otoczeniu 0, natomiast  $(\nabla f_s)$  jest ideałem w  $\mathcal{O}_2$  generowanym przez  $\nabla f_s$ .*

## Problem

Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje?

# Skok liczby Milnora

Ponieważ liczba Milnora jest półciągła z góry w topologii Zariskiego w rodzinie osobliwości, zatem istnieje otoczenie  $S$  punktu  $0$  takie, że

- 1  $\mu_s = \text{const.}$  dla  $s \in S \setminus \{0\}$ ,
- 2  $\mu_0 \geq \mu_s$  dla  $s \in S$ .

Ponieważ liczba Milnora jest półciągła z góry w topologii Zariskiego w rodzinie osobliwości, zatem istnieje otoczenie  $S$  punktu  $0$  takie, że

- 1  $\mu_s = \text{const.}$  dla  $s \in S \setminus \{0\}$ ,
- 2  $\mu_0 \geq \mu_s$  dla  $s \in S$ .

## Definicja

Stałą różnicę  $\mu_0 - \mu_s$  (dla  $s \in S \setminus \{0\}$ ) nazywamy **skokiem liczby Milnora deformacji** ( $f_s$ ) i oznaczamy  $\lambda((f_s))$ .

Najmniejsza niezerowa wartość wśród skoków deformacji osobliwości  $f_0$  nazywana jest **skokiem liczby Milnora**  $f_0$  i oznaczana  $\lambda(f_0)$ .

- Dodatkowe warunki na  $f_0$ 
  - Gusein-Zade: pokazał, że jeśli  $f_0$  jest nierozkładalna to  $\lambda(f_0) = 1$
  - Brzostowski, Krasieński, Walewska: badali liczby Milnora osobliwości jednorodnych, w szczególności pokazali, że jeśli  $f_0^n(x, y) := x^n + y^n$ , to  $\lambda(f_0^n) = \left[\frac{n}{2}\right]$

# Fakty dotyczące liczb Milnora i ich skoków

- Dodatkowe warunki na  $f_0$  i na rodzinę  $(f_s)$ 
  - Walewska: wykazała, że w rodzinie deformacji niezdegenerowanych  $\lambda^{nd}(f_0^n) = n - 1$
  - Walewska badała liczby Milnora dla osobliwości niezdegenerowanych i dogodnych w szczególności dla osobliwości quasi-jednorodnych w rodzinie deformacji niezdegenerowanych
  - pokazałam, że dla osobliwości jednorodnych i deformacji liniowych  $\lambda^{lin}(f_0) = n - 2$
  - uogólniłam fakt w przypadku, gdy  $f_0$  jest osobliwością quasi-jednorodną  $f_0(x, y) = x^k y^l (x^p + \dots + y^q)$ , to

$$\lambda^{lin}(f_0) = \begin{cases} 1 & , p = q, k + l + p = 2 \\ k + l + p - 2 & , p = q, k + l + p > 2 \\ 1 & , p \neq q, p \mid q, p + k \leq 2 \\ p + k - 1 & , p \neq q, p \mid q, p + k > 2 \\ NWD(p, q) & , p \nmid q \end{cases}$$

## Problem

- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje o zadanym rzędzie?

## Problem

- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?

## Problem

- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości jednorodnej  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?

## Problem

- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości jednorodnej  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?

Problem powstał przy dowodzie pełnej charakteryzacji osobliwości o skoku liniowym 1.

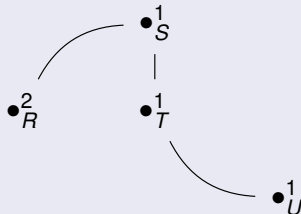
# Diagramy Enriquesa

Do badania deformacji liniowych używane są **diagramy Enriquesa** oraz rezultat M. Alberich-Carraminñany i J. Roé.

# Diagramy Enriquesa

Do badania deformacji liniowych używane są **diagramy Enriquesa** oraz rezultat M. Alberich-Carraminñany i J. Roé.

Dowolnej osobliwości można przypisać jej diagram Enriquesa  $D$ , który reprezentuje proces rozwiązywania osobliwości. Jest to skończony graf z dwoma rodzajami krawędzi i z wyróżnionym korzeniem  $R$ . Dodatkowo każdemu wierzchołkowi możemy przypisać liczbę  $\nu(P)$ , która reprezentuje rząd kolejnych transformat właściwych  $f_0$  w  $P$ .



**Rysunek:** Osobliwość  $x^2 - y^3 = 0$

M. Alberich-Carramiñana i J. Roé w ich pracy ([1]):

- podali warunek konieczny i wystarczający, aby dwa diagramy reprezentowały dwie osobliwości takie, że jedna jest liniową deformacją drugiej,
- warunek ten jest w formie relacji między diagramami; jest to numeryczny warunek możliwy do sprawdzenia dla dowolnych dwóch diagramów.

## Problem

- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje o zadanym rzędzie?

## Problem

- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?

## Problem

- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości jednorodnej  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?

## Problem

- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?
- Dla zadanej osobliwości jednorodnej  $f_0$  jakie liczby Milnora mogą osiągać jej deformacje liniowe o zadanym rzędzie?

Problem powstał przy dowodzie pełnej charakteryzacji osobliwości o skoku liniowym 1.

# Osobliwości o skoku liczby Milnora równym 1

Gusein-Zade ([4]) udowodnił, że jeśli dla osobliwości  $f_0$  istnieje maksymalny dywizor wyjątkowy, który nie przecina więcej niż trzy składowe obrazu totalnego krzywej  $f_0 = 0$ , wtedy  $\lambda(f_0) = 1$ .

## Twierdzenie (Gusein-Zade)

*Niech  $f_0 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  będzie osobliwością, a  $(D, \nu)$  jej diagramem minimalnym. Jeśli jeden z poniższych warunków zachodzi*

- 1 diagram  $D$  zawiera tylko korzeń o wadze 2,*
- 2 istnieje liść  $P \in D$  taki, że  $P$  jest satelitarny o wadze 1,*
- 3 istnieje liść  $P \in D$  taki, że  $P$  jest swobodny o wadze 2,*

*to  $\lambda(f_0) = \lambda^{\text{lin}}(f_0) = 1$ .*

# Dodatkowy warunek dla skoku liczby Milnora równym 1

## Twierdzenie

Niech  $f_0 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  będzie osobliwością, a  $(D, \nu)$  jej diagramem minimalnym. Jeśli jeden z poniższych warunków zachodzi

- 4 istnieją  $P_1, \dots, P_k \in D$  ( $k \geq 2$ ) takie, że  $P_1$  jest korzeniem,  $P_i \rightarrow P_{i-1}$  dla  $i = 2, \dots, k$ ,  $P_2$  jest jedynym wierzchołkiem bliskim do  $P_1$ ,  $P_k$  jest jedynym wierzchołkiem bliskim do  $P_{k-1}$  i  $\nu(P_k) = \nu(P_1) - 2$ ,  $\nu(P_i) = \nu(P_1) - 1$  dla  $i = 2, \dots, k - 1$  wtedy  $k > 2$ .

# Dodatkowy warunek dla skoku liczby Milnora równym 1

## Twierdzenie

5 *istnieją  $P_0, P_1, \dots, P_k \in D$  ( $k \geq 2$ ) takie, że  $P_1$  jest swobodny,  $P_1, \dots, P_k \rightarrow P_0$ ,  $P_i \rightarrow P_{i-1}$  dla  $i = 2, \dots, k$ ,  $P_2$  jest jedynym wierzchołkiem bliskim do  $P_1$ ,  $P_k$  jest jedynym wierzchołkiem bliskim do  $P_{k-1}$  i  $\nu(P_k) = \nu(P_1) - 2$ ,  $\nu(P_i) = \nu(P_1) - 1$  dla  $i = 2, \dots, k - 1$  wtedy  $k > 2$ .  
wtedy  $\lambda(f_0) = \lambda^{lin}(f_0) = 1$ .*

## Twierdzenie

Niech  $f_0 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  będzie osobliwością a  $(D, \nu)$  jej diagramem minimalnym.  $\lambda^{\text{lin}}(f_0) = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków (1) – (5).

## Twierdzenie

Niech  $f_0 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  będzie osobliwością a  $(D, \nu)$  jej diagramem minimalnym.  $\lambda^{\text{lin}}(f_0) = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków (1) – (5).

- $\Leftarrow$  - udowodnione.

## Twierdzenie

Niech  $f_0 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  będzie osobliwością a  $(D, \nu)$  jej diagramem minimalnym.  $\lambda^{\text{lin}}(f_0) = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków (1) – (5).

- $\Leftarrow$  - udowodnione.
- $\Rightarrow$  - w trakcie dowodu (wspólna praca z TK).

## Twierdzenie

Niech  $f_0 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  będzie osobliwością a  $(D, \nu)$  jej diagramem minimalnym.  $\lambda^{\text{lin}}(f_0) = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków (1) – (5).

- $\Leftarrow$  - udowodnione.
- $\Rightarrow$  - w trakcie dowodu (wspólna praca z TK).
- Problem: Jeśli mamy osobliwość jednorodną rzędu  $n$  i jej liniową deformację rzędu  $j < n$ , czy możemy znaleźć oszacowanie ostre liczby Milnora tej deformacji?

## Twierdzenie (???)

*Dla dowolnej semi-jednorodnej osobliwości  $f_0$  stopnia  $n$  i jej liniowej deformacji  $f_s$  rzędu  $j \geq 2$  mamy, że*

$$\mu(f_s) \leq (n - 2)j + 1.$$

*Ponadto istnieje deformacja  $f_s$  rzędu  $j$  taka, że*  
$$\mu(f) = (n - 2)j + 1.$$

## Twierdzenie (doktorat)

*Dla dowolnej semi-jednorodnej osobliwości  $f_0$  stopnia  $n \geq 3$  i jej liniowej deformacji  $f_s$  mamy:*

$$\mu(f_s) \leq (n-1)^2 - (n-2) = (n-2)(n-1) + 1.$$

## Wniosek

*Istnieje deformacja  $f_s$  taka, że  $\mu(f_s) = (n-2)(n-1) + 1$  i jest ona rzędu  $n-1$ .*

# Weryfikacja empiryczna

Dla każdego  $n \leq 10$  maksymalna wartość  $\mu$  zgadza się z formułą  $(n-2)j+1$ , i istnieje diagram maksymalizujący.

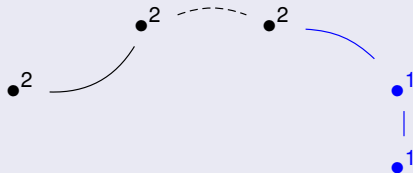
| $n$ | $j$ | liczba lin.<br>deformacji | $(n-2)j+1$ | liczba def.<br>o max. $\mu$ |
|-----|-----|---------------------------|------------|-----------------------------|
| 3   | 2   | 3                         | 3          | 1                           |
| 4   | 3   | 5                         | 7          | 1                           |
| 4   | 2   | 5                         | 5          | 1                           |
| 5   | 4   | 10                        | 13         | 2                           |
| 5   | 3   | 9                         | 10         | 1                           |
| 5   | 2   | 7                         | 7          | 1                           |
| 6   | 5   | 16                        | 21         | 2                           |
| 6   | 4   | 25                        | 17         | 2                           |
| 6   | 3   | 15                        | 13         | 1                           |
| 6   | 2   | 9                         | 9          | 1                           |
| 7   | 6   | 28                        | 31         | 4                           |
| 7   | 5   | 47                        | 26         | 2                           |
| 7   | 4   | 52                        | 21         | 2                           |
| 7   | 3   | 21                        | 16         | 1                           |
| 7   | 2   | 11                        | 11         | 1                           |
| 8   | 7   | 45                        | 43         | 4                           |
| 8   | 6   | 107                       | 37         | 4                           |
| 8   | 5   | 118                       | 31         | 2                           |

| $n$ | $j$ | liczba lin.<br>deformacji | $(n-2)j+1$ | liczba def.<br>o max. $\mu$ |
|-----|-----|---------------------------|------------|-----------------------------|
| 8   | 4   | 93                        | 25         | 3                           |
| 8   | 3   | 29                        | 19         | 1                           |
| 8   | 2   | 13                        | 13         | 1                           |
| 9   | 8   | 73                        | 57         | 6                           |
| 9   | 7   | 203                       | 50         | 4                           |
| 9   | 6   | 325                       | 43         | 4                           |
| 9   | 5   | 226                       | 36         | 2                           |
| 9   | 4   | 150                       | 29         | 3                           |
| 9   | 3   | 37                        | 22         | 1                           |
| 9   | 2   | 15                        | 15         | 1                           |
| 10  | 9   | 113                       | 73         | 7                           |
| 10  | 8   | 418                       | 65         | 6                           |
| 10  | 7   | 758                       | 57         | 4                           |
| 10  | 6   | 779                       | 49         | 5                           |
| 10  | 5   | 409                       | 41         | 3                           |
| 10  | 4   | 227                       | 33         | 3                           |
| 10  | 3   | 47                        | 25         | 1                           |
| 10  | 2   | 17                        | 17         | 1                           |

# Szkic dowodu indukcyjnego względem $j$

## Krok początkowy

Niech  $(E, \nu)$  będzie diagramem Enriquesa deformacji liniowej rzędu  $j = 2$ .

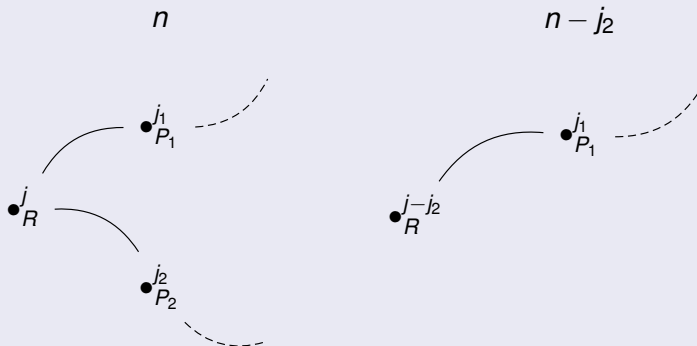


Wówczas ponieważ jest to diagram liniowej deformacji to  
 $2k \leq n + k - 1$  (lub  $4k + 2 \leq 2n + 2k - 1$ ), stąd  
 $\mu((E, \nu)) = 2k + 1 - 2 \leq 2(n - 1) - 1 = (n - 2)2 + 1$  (lub  
 $\mu((E, \nu)) = 2k + 1 - 1 \leq 2n - 3 = (n - 2)2 + 1$ ).

# Szkic dowodu indukcyjnego względem $j$

## Przypadek 1

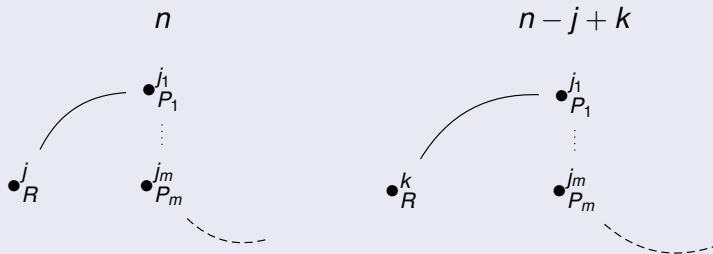
Niech  $(E, \nu)$  będzie diagramem Enriquesa deformacji liniowej rzędu  $j$  oraz w  $E$  istnieją minimum dwa wierzchołki za  $R$ .



# Szkic dowodu indukcyjnego względem $j$

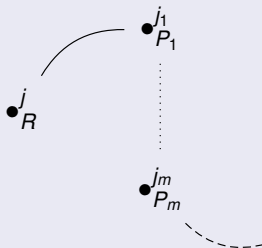
## Przypadek 2

Niech  $(E, \nu)$  będzie diagramem Enriquesa deformacji liniowej rzędu  $j$  oraz w  $E$  mamy  $\sum_{i=1}^n \nu(P_i) =: k < j$ .



## Przypadek 3

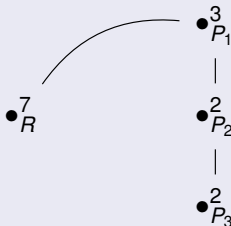
Problem, gdy  $\sum_{i=1}^n \nu(P_i) = j$  – "trudny diagram".



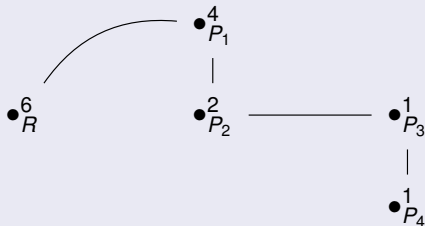
# "Trudny diagram"

Dla dowolnego  $n \geq 2$  i  $j \geq 3$ , jeden z diagramów realizujących  $(n-2)j+1$  jest "trudnym diagramem"

$n = 9, j = 7$



$n = 9, j = 6$



# Algorytm otrzymywania maksymalizującego diagramu

Algorytm konstruuje jedyny diagram maksymalizujący liczbę Milnora dla zadanych  $n, j$ .

- Jeśli  $E = \emptyset$ , to dodaj do niego korzeń o wadze  $j$ .
- Niech  $P$  będzie ostatnio dodanym wierzchołkiem w  $E$ . Jeśli
  - $P$  jest korzeniem, to dodaj w  $E$  nowy wierzchołek  $S$  taki, że  $\nu(S) = \min(j, n - j + 1)$  oraz  $S \rightarrow P$ .
  - $P$  jest wierzchołkiem swobodnym takim, że  $P \rightarrow P'$  i  $\nu(P) = \nu(P')$ , to dodaj nowy wierzchołek  $S$  taki, że  $\nu(S) = s$ , gdzie  $s$  jest maksymalną liczbą naturalną spełniającą warunki  $s \leq \nu(P)$  i  $\text{ord}_{\nu_0}(P) + 1 \geq \text{ord}_{\nu}(P) + s$  oraz  $S \rightarrow P$ . Gdy nie ma takiego  $s$  – koniec algorytmu.
  - $P$  jest wierzchołkiem swobodnym takim, że  $P \rightarrow P'$  i  $\nu(P) < \nu(P')$ , to dodaj nowy wierzchołek  $S$  taki, że  $\nu(S) = s$ , gdzie  $s$  jest maksymalną liczbą naturalną spełniającą warunki  $s \leq \nu(P)$ ,  $s + \nu(P) \leq \nu(P')$  i  $\text{ord}_{\nu_0}(P) + \text{ord}_{\nu_0}(P') \geq \text{ord}_{\nu}(P) + \text{ord}_{\nu}(P') + s$  oraz  $S \rightarrow P, P'$ . Gdy nie ma takiego  $s$  – koniec algorytmu.

# Algorytm otrzymywania maksymalizującego diagramu

- Niech  $P$  będzie ostatnio dodanym wierzchołkiem w  $E$ . Jeśli
  - $P$  jest wierzchołkiem satelitarnym takim, że  $P \rightarrow P', P''$  i  $\nu(P'') > \sum_{T \rightarrow P''} \nu(T)$ . Wtedy dodaj nowy wierzchołek  $S$  taki, że  $\nu(S) = s$ , gdzie  $s$  jest maksymalną liczbą naturalną spełniającą warunki  $s \leq \nu(P)$ ,  $s + \sum_{T \rightarrow P''} \nu(T) \leq \nu(P'')$  i  $ord_{\nu_0}(P) + ord_{\nu_0}(P'') \geq ord_{\nu}(P) + ord_{\nu}(P'') + s$  oraz  $S \rightarrow P, P''$ . Gdy nie ma takiego  $s$  – przejdź do następnego kroku.
  - $P$  jest wierzchołkiem satelitarnym takim, że  $P \rightarrow P', P''$  i  $\nu(P'') = \sum_{T \rightarrow P''} \nu(T)$ . Wtedy dodaj nowy wierzchołek  $S$  taki, że  $\nu(S) = s$ , gdzie  $s$  jest maksymalną liczbą naturalną spełniającą warunki  $s \leq \nu(P)$ ,  $s + \nu(P) \leq \nu(P')$  i  $ord_{\nu_0}(P) + ord_{\nu_0}(P') \geq ord_{\nu}(P) + ord_{\nu}(P') + s$  oraz  $S \rightarrow P, P'$ . Gdy nie ma takiego  $s$  – koniec algorytmu.

Empirycznie sprawdzone dla  $n \leq 100$  i  $j \leq n - 1$ .

Otwarte problemy:

- 1 Charakteryzacja skoku 1 (kombinatoryczna).
- 2 Przypadek „trudnego diagramu”.
- 3 Poprawność algorytmu.

# Dziękuję bardzo za uwagę!



M. Alberich-Carramiñana, J. Roé: *Enriques Diagrams and Adjacency of Planar Curve Singularities*, Canad. J. Math. Vol 57(1), 2005.



S. Brzostowski, T. Krasieński, J. Walewska: *Milnor numbers in deformations of homogeneous singularities* Bulletin des Sciences Mathématiques, (168), 2021.



E. Casas-Alvero: *Singularities of Plane Curve*, Cambridge University Press, 2000.



S. Gusein-Zade: *On singularities from which an  $A_1$  can be split off.*, Funct. Anal. Appl., 1993.