Autoreferat

Dariusz Idczak

Spis treści

1 Osiągnięcia naukowe

1.1 Publikacje w czasopismach naukowych

[1] D. Idczak, *Applications of the fixed point theorem to problems of controllability*, Bulletin de la Societe des Sciences et des Lettres de Lodz, vol. XXXIX.3, no. 57 (1989), 1-7.

[2] D. Idczak, S. Walczak, *On the controllability of nonlinear Goursat systems*, Optimization 23 (1992), 91-98.

[3] D. Idczak, K. Kibalczyc, S. Walczak, *On some optimal control problem for two-dimensional continuous systems*, Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci.41 (4) (1993), 371-379.

[4] D. Idczak, *Nonlinear Goursat-Darboux problem and its optimization*, Nonlinear Vibration Problems 25 (1993), 143-157.

[5] D. Idczak, S. Walczak, *Optimal control hyperbolic systems with bounded variations of controls*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 160 (1994), 159-171.

[6] D. Idczak, *Functions of several variables of finite variation and their differentiability*, Annales Polonici Mathematici LX.1 (1994), 47-56.

[7] D. Idczak, S. Walczak, *On Helly's theorem for functions of several variables and its applications to variational problems*, Optimization 30 (1994), 331-343.

[8] D. Idczak, K. Kibalczyc, S. Walczak, *On an optimization problem with cost of rapid variation of control*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 36 (1994), 117-131.

[9] D. Idczak, S. Walczak, *On the existence of the Carathodory solutions for some boundary value problems*, Rocky Mountain J. Math. 24 (1) (1994), 1-13.

[10] D. Idczak, *Optimal control of a continuous n-D Roesser model*, Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci. 43 (2) (1995), 227-234.

[11] D. Idczak, J. Matula, S. Walczak, *The existence of an optimal solution for two-dimensional continuous control systems*, Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci. 43 (2) (1995), 235-245.

[12] D. Idczak, *The generalization of the Du Bois-Reymond lemma for functions of two variables to the case of partial derivatives of any order*, Topology in Nonlinear Analysis, Banach Center Publications 35 (1996), 221-236.

[13] D. Idczak, *Necessary optimality conditions for a nonlinear continuous n-D Roesser model*, Mathematics and Computers in Simulation 41 (1996), 87-94.

[14] D. Idczak, *M-periodic problem of order 2k*, Topological Methods in Nonlinear Analysis 11 (1998), 169-185.

[15] D. Idczak, *Optimal control of a coercive Dirichlet problem*, SIAM J. Control Optim. 36 (4) (1998), 1250-1267.

[16] D. Idczak, *Distributional derivatives of functions of two variables of finite variation and their application to an impulsive hyperbolic equation*, Czechoslovak Mathematical Journal 48 (123) (1998), 145-171.

[17] D. Idczak, S. Walczak, *On the existence of a solution for some distributed optimal control hyperbolic system*, Internat. J. Math. & Math. Sci., vol. 23, no. 5 (2000), 297-311.

[18] D. Idczak, *Stability in semilinear problems*, J. Differential Equations 162 (2000), 64-90.

[19] D. Idczak, S. Walczak, *Existence of an optimal solution for a continuous Roesser problem with a terminal condition*, K.Gałkowski and J. Wood (Eds.): Multidimensional Signals, Circuits & Systems, Taylor & Francis, London, New York (2001), 183-189.

[20] D. Idczak, *O pewnych problemach wariacyjnych dla równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami brzegowymi typu Dirichleta i okresowymi oraz ich zastosowaniu*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ł ódzkiego, Łódź, 2000 (rozprawa habilitacyjna, oparta na pracach [14], [15], [18] i zawierająca pewne rozszerzenia rezultatów uzyskanych w wymienionych pracach).

[21] D. Idczak, A. Rogowski, *On a generalization of Krasnoselskii's theorem*, J. Austral. Math. Soc. 72 (2002), 389-394.

[22] D. Idczak, *Bang-bang principle for linear and nonlinear Goursat-Darboux problems*, Int. J. Control 76 (11) (2003), 1089-1094.

[23] D. Idczak, M. Majewski, S. Walczak, *Stability analysis of solutions to an optimal control problem associated with a Goursat-Darboux problem*, K. Gałkowski, R. W. Longman, E. Rogers (Eds.): Multidimensional Systems nD and Iterative Learning Control, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 13 (1) (2003), 29-44.

[24] D. Idczak, S. Walczak, *On some properties of Goursat-Darboux systems with distributed and boundary controls*, Int. J. Control 77 (9) (2004), 837-846.

[25] D. Idczak, M. Majewski, *Bang-bang controls and piecewise constant ones for continuous Roesser system*, Multidimensional Systems and Signal Processing 17 (2006), 243-255.

[26] D. Idczak, *Maximum principle for optimal control of two-directionally continuous linear repetitive processes*, E. Zerz and K. Galkowski (Eds.): Recent Advances in Multidimensional Systems and Signals, Multidimensional Systems and Signal Processing 19 (2008), 411-423.

[27] D. Idczak, *Approximative piecewise constant bang-bang principle for differential repetitive processes*, Int. J. Control 82 (5) (2009), 910-917.

[28] D. Idczak, S. Walczak, *An asymptotical stability in variational sense for second order systems*, Advanced Nonlinear Studies 10 (2010), 161-174.

[29] D. Idczak, M. Majewski, *A generalization of the Poincare-Miranda theorem with an application to the controllability of nonlinear repetitive processes*, K. Gałkowski and E. Rogers (Eds.): Recent Developments on Multidimensional Systems, Control and Signals – Theory and Applications, ASIAN J. Control 12 (2) (2010), 1-9.

[30] D. Idczak, R. Kamocki, *Optimal control systems of second order with infinite time horizon – maximum principle*, Dr. Sc. S. Cakaj (Ed.): Modeling, Simulation and Optimization – Tolerance and Optimal Control, INTECH, Vukovar, 2010.

[31] D. Idczak, S. Walczak, *Optimal control systems of second order with infinite time horizon – existence of solutions*, Journal of Optimization Theory and Applications 147 (2010), 205-222.

[32] D. Idczak, M. Majewski, *Existence of optimal solutions of two-directionally continuous linear repetitive processes*, Multidimensional Systems and Signal Processing 23 (2012), 155-162, DOI: 10.1007/s11045-010-0105-4; published online: 7.04.2010.

[33] D. Idczak, R. Kamocki, *On the existence and uniqueness and formula for the solution of R-L fractional Cauchy problem in* $\mathbb{R}^n$, Fractional Calculus and Applied Analysis 14 (4) (2011), 538-553.

[34] D. Idczak, S. Walczak, *A fractional imbedding theorem*, Fractional Calculus and Applied Analysis 15 (3) (2012), 418-425.

[35] D. Idczak, A. Skowron, S. Walczak, *On the diffeomorphisms between Banach and Hilbert spaces*, Advanced Nonlinear Studies 12 (2012), 89–100.

[36] D. Idczak, M. Majewski, *Fractional fundamental lemma of order* $\alpha \in (n - 1/2, n)$ *with* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Dynamic Systems and Applications 21 (2012), 251-268.

[37] D. Idczak, A. Skowron, S. Walczak, *Sensitivity of a fractional integro-differential Cauchy problem of Volterra type*, Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, Article ID 129478, 8 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/129478.

[38] D. Idczak, R. Kamocki, *Fractional differential repetitive processes with Riemann-Liouville and Caputo derivatives*, Multidimensional Systems and Signal Processing 26 (2015), 193-206, DOI 10.1007/s11045-013-0249-0, published online: 25.09.2013.

[39] D. Idczak, S. Walczak, *Fractional Sobolev spaces via Riemann-Liouville derivatives,* Journal of Function Spaces and Applications, vol. 2013, Article ID 128043, 15 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/128043.

[40] D. Idczak, A. Skowron, S. Walczak, *On a class of diffeomorphisms defined by integro-differential operators*, Calculus of Variations and PDEs, Banach Center Publications 101 (2014), 77-86.

[41] D. Idczak, *A global implicit function theorem and its applications to functional equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B 19 (8) (2014), 2549-2556.

[42] D. Idczak, S. Walczak, *Optimization of a fractional Mayer problem – existence of solutions, maximum principle, gradient methods*, Opuscula Mathematica 34 (4) (2014), 763-775.

[43] L. Bourdin, D. Idczak, *A fractional fundamental lemma and fractional integration by parts formula - Applications to critical points of Bolza functionals and to linear boundary value problems*, Advances in Differential Equations 20 (3-4) (2015), 213-232.

[44] D. Idczak, R. Kamocki, M. Majewski, S. Walczak, *Existence of optimal solutions to Lagrange problems for Roesser type systems of the first and fractional orders*, Applied Mathematics and Computation 266 (2015), 809-819.

[45] D. Idczak, S. Walczak, *Application of a global implicit function theorem to a general fractional integro-differential system of Volterra type*, Journal of Integral Equations and Applications 27 (4) (2015), 521-554.

[46] D. Idczak, S. Walczak, *On a linear-quadratic problem with Caputo derivative*, Opuscula Mathematica 36 (1) (2016), 49-68.

[47] D. Idczak, *On a generalization of a global implicit function theorem*, Advanced Nonlinear Studies 16 (1) (2016); DOI: 10.1515/ans-2015-5008.

[48] D. Idczak, *Functions of finite fractional variation and their applications to fractional impulsive equations*, Czechoslovak Mathematical Journal 67 (142) (2017), 171-195; DOI: 10.21136/CMJ.20170455-15.

[49] T. Kaczorek, D. Idczak, *Cauchy formula for the time-varying linear systems with Caputo derivative*, Fractional Calculus and Applied Analysis 20 (2) (2017), 494-505; DOI: 10.1515/fca-2017-0025.

[50] D. Idczak, R. Kamocki, *Existence of optimal solutions to Lagrange problem for a fractional nonlinear control system with Riemann-Liouville derivative*, Mathematical Control and Related Fields 7 (3) (2017), 449-464; DOI: 10.3934/mcrf.2017016.

1.2 Publikacje w materiałach konferencyjnych - pełne teksty

[51] D. Idczak, S. Walczak, *On the controllability of continuous Roesser systems*, Proceedings of the Second International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Polska, 1995, 115-119.

[52] D. Idczak, *The maximum principle for a continuous 2-D Roesser model with a terminal condition*, Proceedings of the Third International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Polska, 1996, 197-200.

[53] D. Idczak, *Nonlinear Roesser problem with a terminal condition. Maximum principle*, Proceedings Volume from the IFAC Workshop - Manufacturing Systems: Modelling, Management and Control, Vienna, Austria, 1997, 197- 202.

[54] D. Idczak, *The bang-bang principle for the Goursat-Darboux problem*, Electronic Proceedings of 15th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, University of Notre Dame, Indiana, USA (2002).

[55] D. Idczak, M. Majewski, *Nonlinear positive 2D systems and optimal control*, L. Benvenuti, A. De Santis and L. Farina (Eds.): Positive Systems - Proceedings of the First Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 2003), Lecture Notes in Control and Information Sciences 294 (2003), 329-336.

[56] D. Idczak, S. Walczak, *Positive systems with nondecreasing controls. Existence and well-posedness*, L. Benvenuti, A. De Santis and L. Farina (Eds.): Positive Systems - Proceedings of the First Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 2003), Lecture Notes in Control and Information Sciences 294 (2003), 369-376.

[57] D. Idczak, S. Walczak, *Optimal control of positive 2-D systems with infinite horizon*, Proceedings Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgia, 2004.

[58] D. Idczak, M. Majewski, *Controllability of Goursat-Darboux systems – some numerical results*, Preprints of the 16th IFAC World Congress, Praga, Czechy, 2005.

[59] D. Idczak, *On a continuous variant of a linear repetitive process*, Proceedings of the Fourth International Workshop on Multidimensional (nD) Systems NDS 2005, Wuppertal, Niemcy, 2005, 247-252.

[60] D. Idczak, S. Walczak, *Positive continuous Roesser systems*, Proceedings of 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, 2006, 2451-2457.

[61] D. Idczak, *Bang-bang principle for a continuous repetitive process with distributed and boundary controls*, Proceedings of 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, 2006, 803-809.

[62] D. Idczak, M. Majewski, S. Walczak, *On controllability of nonlinear systems described by ordinary differential equations*, C. Commault and N. Marchand (Eds.): Positive systems - Proceedings of the Second Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 2006), Lecture Notes in Control and Information Sciences 341 (2006), 287-294.

[63] D. Idczak, R. Kamocki, *Some remarks on the point controllability over all passes for differential repetitive processes with control constraints*, Proceedings of the 2007 International Workshop on Multidimensional (nD) Systems, Aveiro, Portugal, 2007.

[64] D. Idczak, S. Walczak, *Linear-quadratic optimal control problem of second order with infinite time horizon*, Proceedings of the 2007 International Workshop on Multidimensional (nD) Systems, Aveiro, Portugal, 2007.

[65] D. Idczak, S. Walczak, *Compactness of fractional imbeddings*, Proceedings of the 17th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Poland (2012), 585-588.

[66] D. Idczak, M. Majewski, *Compactness of fractional embeddings for boundary value problems*, Proceedings of the 18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Poland (2013), 599-603.

[67] D. Idczak, R. Kamocki, M. Majewski, *Fractional continuous Roesser model with Riemann-Liouville derivative*, Proceedings of the 8th International Workshop on Multidimensional Systems (nDS'13), Erlangen, Germany, 2013.

1.3 Prace przyjęte do publikacji w czasopismach naukowych

[68] D. Idczak, R. Kamocki, M. Majewski, *On a fractional continuous counterpart of Fornasini-Marchesini model*, Journal of Integral Equations and Applications.

[69] D. Idczak, S. Walczak, *Necessary optimality conditions for an integro-differential Bolza problem via Dubovitskii-Miljutin method*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B.

1.4 Opis uzyskanych rezultatów

Moje zainteresowania naukowe skupiają się głównie wokół teorii równań różniczkowych, teorii sterowania optymalnego i teorii sterowalności, a także wybranych zagadnień natury podstawowej z zakresu analizy nieliniowej.

1.4.1 Rozprawa doktorska

W rozprawie doktorskiej nt. „*Optymalizacja układów opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi*" badane są układy sterowania o parametrach rozłożonych postaci (12) i (13) (patrz str. 16). Dla układu (12) uzyskane zostały twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i ciągłej zależności rozwiązania (z^1, z^2) od sterowania u oraz warunki gwarantujące istnienie rozwiązania zadania sterowania optymalnego opisanego przez liniowy układ sterowania i całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu. Uzyskane także zostały warunki konieczne optymalności dla takiego zadania. Dla układu (13) udowodnione zostało twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania z przy ustalonym sterowaniu u oraz warunki konieczne optymalności dla zadania sterowania optymalnego opisanego przez półliniowy układ sterowania, punktowe warunki końcowe i całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu.

Wyniki uzyskane w rozprawie doktorskiej bądź ich uogólnienia zostały opublikowane i będą omówione w dalszej części autoreferatu.

1.4.2 Rozprawa habilitacyjna

W rozprawie habilitacyjnej nt. *"O pewnych problemach wariacyjnych dla równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami brzegowymi typu Dirichleta i okresowymi oraz ich zastosowaniu"*, przy pomocy metod wariacyjnych, badane są zwyczajne układy sterowania drugiego i wyższych rzędów. Prezentowane podejście i rezultaty uzyskane dla układów sterowania zastosowane są do badania zadań sterowania optymalnego opisanych przez te układy. Rozprawa, oparta na pracach [14], [15], [18] ([1]), składa się z trzech rozdziałów.

[1]oznaczenia liczbowe pozycji bibliograficznych dotyczą prac autora oraz prac współautorskich i są zgodne ze spisem publikacji umieszczonym na początku autoreferatu; w przypadku cytowania prac innych autorów używane są oznaczenia literowe, bądź literowo-liczbowe i zgodne są z zestawieniem tych prac umieszczonym na końcu rozdziału 1.4 autoreferatu

W rozdziale 1 nt. „*Stabilność półliniowych problemów Dirichleta*" zawarte są rezultaty uzyskane w pracy [18] (wyniki uzyskane w pracy [18], jak również w pracach [14] i [15], omówione będą w dalszej części autoreferatu). Jeden z tych rezultatów wykorzystany jest do udowodnienia twierdzenia o istnieniu rozwiązania zadania sterowania optymalnego, opisanego przez układ sterowania (1) (patrz str. 10) i całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu.

W rozdziale 2 nt. „*Macierzowo-okresowy problem rzędu 2k*" zawarte są rezultaty uzyskane w pracy [14]. Ponadto, podane są zastosowania tych rezultatów do zbadania ciągłej zależności rozwiązań układu sterowania od sterowań i, podobnie jak w rozdziale 1, do dowodu twierdzenia egzystencjalnego dla zadania sterowania optymalnego, opisanego przez ten układ i całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu.

W rozdziale 3 nt. „*Koercytywny problem Dirichleta drugiego rzędu i jego optymalizacja*" zawarte są rezultaty uzyskane w pracy [15]. Także i w tej części rozprawy, obok wyników uzyskanych w pracy [15], otrzymane jest twierdzenie o istnieniu rozwiązania odpowiedniego zadania sterowania optymalnego.

1.4.3 Prace dotyczące równań różniczkowych

Prace omawiane w niniejszym rozdziale dotyczą problemów początkowych i brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych, cząstkowych i różniczkowo-całkowych, z pochodnymi całkowitego i niecałkowitego rzędu. W przypadku pochodnych niecałkowitego rzędu rozważane były pochodne Riemanna-Liouville'a i Caputo.

Równania zwyczajne

W pracy [18] uzyskane są twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań od parametru funkcyjnego (sterowania) ([2]) dla półliniowego układu drugiego rzędu z warunkami brzegowymi typu Dirichleta

$$\begin{cases} \ddot{u} + au = D_u F(t, u, \omega), \ t \in I := [0, \pi] \text{ p.w.}, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $F : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $D_u F$ oznacza gradient funkcji F względem zmiennej u, bez założeń gwarantujących jednoznaczność rozwiązania. Problem ciągłej zależności rozwiązań od sterowań dla zwyczajnych problemów Dirichleta drugiego rzędu, w przypadku $n = 1$ i przy założeniu jednoznaczności rozwiązania, był badany m.in. w [Ga], [Kla], [Ing], [LP], [Se1], [VK], [BL]. W pracy [18] najpierw wyprowadzone są, przy wykorzystaniu dualnej zasady najmniejszego działania ([Maw]), twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań od prawej strony dla półliniowego równania operatorowego postaci

$$Lu = \nabla g(u), \tag{2}$$

[2]ciągła zależność rozwiązań od parametrów funkcyjnych lub, ogólniej, od prawej strony układu nazywana jest czasami stabilnością układu; należy odróżniać pojęcie stabilności układu od pojęcia stabilności rozwiązania układu, o którym mowa w dalszej części autoreferatu

gdzie $L : D(L) \subset H \to H$ jest liniowym operatorem samosprzężonym o domkniętym obrazie, $g : H \to \mathbb{R}$ - funkcją wypukłą i ciągłą na H oraz różniczkowalną w sensie Gâteaux na dziedzinie operatora L, H - rzeczywistą przestrzenią Hilberta. Następnie, wyniki otrzymane dla powyższego równania operatorowego wykorzystane są do uzyskania twierdzeń o ciągłej zależności rozwiązań od parametru funkcyjnego $\omega : I \to \mathbb{R}^m$ dla problemu Dirichleta (1). Rozważany jest przypadek, gdy $a \geq 1$, t.zn. gdy funkcjonał działania dla powyższego równania nie jest koercytywny([3]). Przypadek koercytywny ($a < 1$), także bez założeń gwarantujących jednoznaczność rozwiązania, badany był, w oparciu o bezpośrednią metodę rachunku wariacyjnego, w pracy [Wal3].

W pracy [14] badany jest, przy pomocy bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego, pewien nieliniowy problem parzystego rzędu $(2k)$ z macierzowo-okresowymi warunkami brzegowymi, opisanymi przy pomocy macierzy kwadratowej A. Z uwagi na złożony zapis tego problemu, niżej podamy jedynie pewne jego szczególne przypadki.

Gdy $k = 2$, problem ten przyjmuje postać (dla skrócenia zapisu pomijamy symbol zmiennej t jako argumentu funkcji u i jej pochodnych)

$$\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}\ddot{u} - D_{u_1}G(t,u,\dot{u})) + D_uG(t,u,\dot{u}) = 0,\ t \in I \text{ p.w.}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u(\pi) \\ \dot{u}(\pi) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}\mid_{t=0} \\ (\frac{d}{dt}\ddot{u} - D_{u_1}G(t,u,\dot{u}))\mid_{t=0} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \ddot{u}\mid_{t=\pi} \\ (\frac{d}{dt}\ddot{u} - D_{u_1}G(t,u,\dot{u}))\mid_{t=\pi} \end{bmatrix},$$

gdzie $G = G(t,u,u_1) : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{bmatrix}$ jest macierzą nieosobliwą i taką, że $A^T = A^{-1}$ oraz

$$B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & -a_{0,1} \\ -a_{1,0} & a_{0,0} \end{bmatrix}.$$

Jeśli funkcja G jest dostatecznie gładka, równanie (3) przyjmuje postać normalną, tzn.

$$u^{(4)} + H(t,u,\dot{u},\ddot{u}) = 0,\ t \in I \text{ p.w.},$$

gdzie

$$\begin{aligned} H(t,u,u_1,u_2) = -D_{u_1t}G(t,u,u_1) - D_{u_1u}G(t,u,u_1)u_1 \\ - D_{u_1u_1}G(t,u,u_1)u_2 + D_uG(t,u,u_1). \end{aligned}$$

[3]przez koercytywność funkcjonału $f : W \to \mathbb{R}$, gdzie W jest przestrzenią unormowaną, rozumiemy zbieżność $f(u) \underset{\|u\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

W przypadku, gdy k jest dowolne, A jest macierzą jednostkową ($A = I$), a funkcja G nie zależy od zmiennych $u_1, ..., u_{k-1}$ ($G = G(t, u)$), badany problem redukuje się do problemu okresowego postaci

$$\begin{cases} u^{(2k)} + (-1)^k D_u G(t, u) = 0, \ t \in I \text{ p.w.} \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(\pi), \ i = 0, ..., 2k-1 \end{cases},$$

zaś gdy $A = -I$ i $G = G(t, u)$, otrzymujemy problem antyokresowy postaci

$$\begin{cases} u^{(2k)} + (-1)^k D_u G(t, u) = 0, \ t \in I \text{ p.w.} \\ u^{(i)}(0) = -u^{(i)}(\pi), \ i = 0, ..., 2k-1 \end{cases}.$$

W monografii [MW], w oparciu o bezpośrednią metodę rachunku wariacyjnego i lemat Du Bois-Reymonda dla funkcji okresowych i pochodnych pierwszego rzędu, udowodnione jest twierdzenie o istnieniu rozwiązania problemu okresowego drugiego rzędu postaci

$$\begin{cases} \ddot{u} = D_u G(t, u), \ t \in I \text{ p.w.}, \\ u(0) = u(\pi), \ \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) \end{cases}.$$

Podstawowym założeniem jest tam warunek „koercytywności na jądrze”([4])

$$\int_I G(t, c) dt \underset{|c| \to \infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{4}$$

W pracy [14] uzyskane zostało analogiczne twierdzenie, z odpowiednim uogólnieniem warunku (4), dla problemu rzędu $2k$ z warunkami brzegowymi typu macierzowo-okresowego. Warunek ten jest postaci

$$\int_I F(t, W(t), W'(t), ..., W^{(k-1)}(t)) dt \underset{\sum_{i=0}^{k-1} |c_i| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

gdzie $W(t) = c_0 + c_1 t + ... + c_{k-1} t^{k-1}$, F jest funkcją opisującą równanie. Dowód tego twierdzenia oparty jest na otrzymanym w pracy lemacie Du Bois-Reymonda dla funkcji jednej zmiennej, spełniających warunki brzegowe typu macierzowo-okresowego, i pochodnych rzędu k. Problemy okresowe wyższego rzędu badane były, przy użyciu metod topologicznych, przez innych autorów. W pracy [MZ] badane jest równanie rzędu czwartego ($k = 2$). Zastosowanej tam metody nie można przenieść na przypadek $k > 2$, o czym wspominają autorzy w swojej pracy. W pracy [OZ] badane są problemy rzędu nieparzystego.

W pracy [15], również przy pomocy bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego, otrzymaliśmy wyniki o istnieniu rozwiązania problemu Dirichleta drugiego rzędu postaci

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} D_{\dot{u}} F(t, u, \dot{u}, \omega) = D_u F(t, u, \dot{u}, \omega), \ t \in I \text{ p.w.} \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

[4] po raz pierwszy warunek tego typu był rozważany w pracy [ALP]

gdzie $F : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

W pracy [28] rozważany jest układ drugiego rzędu postaci

$$\ddot{u} = D_u F(t, u, \omega), \; t \in [0, \infty) \text{ a.e.}, \tag{6}$$

z warunkiem początkowym

$$u(0) = \alpha$$

(układy na nieograniczonym przedziale $[0, \infty)$ nazywane są układami z nieskończonym horyzontem). Zaproponowana tu została nowa koncepcja stabilności rozwiązania zerowego dla układów drugiego rzędu. Dokładniej, wprowadzone zostało pojęcie asymptotycznej stabilności rozwiązania zerowego (względem wartości początkowej α i parametru funkcyjnego ω) w sensie wariacyjnym i podane warunki zapewniające taką stabilność. Zagadnienie stabilności rozwiązań dla układów drugiego rzędu było badane przez niewielu autorów. W pracach [Le], [Se2] badana jest stabilność rozwiązań półliniowych układów drugiego rzędu przy pomocy funkcji Lapunova. W omawianej pracy nie korzysta się z tego typu funkcji. Warto podkreślić, że w przyjętej definicji wariacyjnej stabilności nie nakłada się warunków na wartość pierwszej pochodnej w chwili początkowej, podczas gdy zastosowanie metody polegającej na zastąpieniu badanego układu drugiego rzędu odpowiednim układem pierwszego rzędu i skorzystanie z klasycznych wyników o stabilnoĹ›ci dla układów pierwszego rzędu prowadziłoby do pojęcia stabilności, w którym występowałyby takie warunki. Główny wynik pracy zilustrowany jest przykładem układu, którego rozwiązanie zerowe nie jest stabilne w sensie klasycznym, a jest stabilne w sensie wariacyjnym.

Równania cząstkowe W pracy [12] udowodnione jest uogólnienie lematu Du Bois-Reymonda dla funkcji dwóch zmiennych, spełniających warunki brzegowe typu Dirichleta, i mieszanych pochodnych cząstkowych drugiego rzędu ([Wal2]) na przypadek funkcji dwóch zmiennych i mieszanych pochodnych cząstkowych dowolnego rzędu. Następnie, wyprowadzone jest, w oparciu o bezpośrednią metodę rachunku wariacyjnego, twierdzenie o istnieniu słabego rozwiązania układu postaci

$$\frac{\partial^{2k+2l} z}{\partial x^{2k} \partial y^{2l}} = D_z H(x, y, z), \; (x, y) \in P := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \text{ p.w.},$$

z warunkami brzegowymi typu Dirichleta, które spełnia pewien dodatkowy warunek regularności. W pracy [9] uzyskany został lemat Du Bois-Reymonda dla funkcji dwóch zmiennych, spełniających warunki brzegowe typu Dirichleta, i pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Lemat ten posłużył do udowodnienia, w oparciu o bezpośrednią metodę rachunku wariacyjnego, istnienia jednoznacznego rozwiązania pewnego cząstkowego problemu różniczkowo-całkowego.

Równania różniczkowo-całkowe zwyczajne W pracy [40] udowodnione jest istnienie jednoznacznego rozwiązania zadania Cauchy'ego dla równania różniczkowo-całkowego typu Fredholma

$$u'(t) = \int_a^b F(t,\tau,u(\tau))d\tau + \alpha(\tau),\ t \in [a,b] \text{ p.w.}$$

z warunkiem początkowym

$$u(a) = 0,$$

w przestrzeni funkcji absolutnie ciągłych z pochodną sumowalną z kwadratem. Udowodnione jest także twierdzenie o wrażliwości tego problemu, t.j. o ciągłej różniczkowalności odwzorowania, które parametrowi funkcyjnemu $\alpha \in L^2$ przyporządkowuje odpowiadające mu rozwiązanie powyższego problemu. Rezultaty te uzyskane zostały w oparciu o twierdzenie dyfeomorfizmie otrzymane w pracy [35] (por. rozdział 1.4.6).

Równania z pochodnymi ułamkowego rzędu Kolejnym nurtem badań są układy równań różniczkowych (w tym procesy powtarzalne i równania różniczkowo-całkowe), zawierające pochodne ułamkowe w sensie Riemanna-Liouville'a i Caputo. Ułamkowy rachunek różniczkowy i jego zastosowania w teorii równań różniczkowych przeżywają obecnie intensywny rozwój. Mimo, iż nie ma obecnie teorii fizycznej, która prowadzi do równań stanu zawierających pochodne ułamkowego rzędu, to okazuje się, że wiele procesów o charakterze anomalnym lepiej modelują układy zawierające pochodne ułamkowe, aniżeli układy zawierające jedynie pochodne naturalnych rzędów. Należy tu wymienić m.in. procesy dyfuzji w ośrodkach porowatych ([La] [ACV]), procesy natury lepko-sprężystej dla substancji plazmowych ([BT]), model superkondensatora elektrycznego ([WE]).

W pracy [33] uzyskane jest twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania nieliniowego problemu

$$\begin{cases} D^\alpha_{a+}x(t) = f(t,x(t)),\ \ t \in [a,b] \text{ a.e.} \\ I^{1-\alpha}_{a+}x(a) = c \end{cases} \tag{7}$$

gdzie $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ oraz $D^\alpha_{a+}x$ i $I^\alpha_{a+}x$ są lewostronną pochodną Riemanna-Liouville'a rzędu $\alpha \in (0,1)$ i lewostronną funkcją pierwotną rzędu α funkcji $x(\cdot)$. Ponadto, uzyskany został wzór Cauchy'ego na rozwiązanie w przypadku autonomicznego układu liniowego

$$D^\alpha_{a+}x(t) = Ax(t) + b(t).$$

W przypadku granicznym $\alpha = 1$, wzór ten redukuje się do klasycznego wzoru Cauchy'ego dla zwyczajnego układu linowego pierwszego rzędu. W pracy [49], uzyskane zostały analogiczne wyniki dla problemu

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha_{a+}x(t) = f(t,x(t)),\ \ t \in [a,b] \text{ a.e.} \\ x(a) = c \end{cases}$$

i liniowego nieautonomicznego problemu

$$\begin{cases} {}^C D^{\alpha}_{a+} x(t) = A(t)x(t) + b(t), \ t \in [a,b] \text{ a.e.} \\ x(a) = c \end{cases}$$

gdzie ${}^C D^{\alpha}_{a+}$ jest pochodną Caputo funkcji x.

W pracy [66], przy pomocy bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego, uzyskane zostało twierdzenie o istnieniu rozwiązania pewnego równania potencjalnego, zawierającego pochodne ułamkowe dwóch różnych rzędów. Wcześniej, badane były tego typu problemy, ale dla układów zawierających tylko jedną pochodną ułamkowego rzędu ([Bo], [43]). Zbadanie ogólniejszego problemu możliwe było dzięki wykorzystaniu twierdzenia o zwartości zanurzenia dla przestrzeni funkcji posiadających pochodne Riemanna-Liouville'a uzyskanego w pracy [65] (por. także odpowiednie twierdzenia o zwartych zanurzeniach dla ułamkowych przestrzeni Sobolewa wprowadzonych i badanych w pracy [39]).

Praca [38] dotyczy procesów powtarzalnych ułamkowego rzędu postaci

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+} z_{k+1}(t) = A_1 z_{k+1}(t) + A_2 w_k(t) + B u_{k+1}(t) \\ w_{k+1}(t) = C_1 z_{k+1}(t) + C_2 w_k(t) + D u_{k+1}(t) \end{cases} \tag{8}$$

gdzie $z_k(t) \in \mathbb{R}^n$, $w_k(t) \in \mathbb{R}^m$, $u_k(t) \in \mathbb{R}^r$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, współczynniki występujące po prawej stronie układu są macierzami odpowiednich wymiarów, $D^{\alpha}_{a+} z_{k+1}$ oznacza pochodną rzędu $\alpha \in (0,1)$ w sensie Riemanna-Liouville'a lub Caputo. Powyższy układ jest ułamkowym odpowiednikiem znanego w teorii sterowania automatycznego dyskretno-ciągłego procesu powtarzalnego (nazywanego także różniczkowym procesem powtarzalnym), znajdującego zastosowanie m.in. do opisu procesu wydobywczego węgla i procesu walcowania metalu. W pierwszym przypadku powyższy proces rozważany jest z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} (I^{1-\alpha}_{a+} z_k)(a) = c_k \text{ for } k \in \mathbb{N}, \\ w_0(t) = f(t) \text{ for } t \in [a,b], \end{cases},$$

natomiast w drugim przypadku - z warunkami

$$\begin{cases} z_k(a) = c_k \text{ for } k \in \mathbb{N}, \\ w_0(t) = f(t) \text{ for } t \in [a,b], \end{cases}.$$

gdzie $c_k \in \mathbb{R}^n$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ są danymi początkowymi. W obu przypadkach uzyskane zostały twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań

$$\mathfrak{z} \in \{\mathfrak{z} = (z_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}} : [a,b] \to \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n; \ z_k(\cdot) \in AC^{\alpha}_{a+}([a,b],\mathbb{R}^n), \ k \in \mathbb{N}\}$$

przy dowolnie ustalonym sterowaniu $\mathfrak{u} = (u_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}} : [a,b] \to \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^r$ należącym do odpowiedniej klasy (tutaj $AC^{\alpha}_{a+}([a,b],\mathbb{R}^n)$ oznacza odpowiednio zbiór funkcji posiadajÄ…cych pochodne w sensie Riemanna-Liouville'a lub Caputo rzędu α), a także twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań od sterowań. W przypadku procesu z pochodną Caputo udowodnione zostało także twierdzenie o aproksymatywnej sterowalności (ten wynik omówiony jest w rozdziale 1.4.5).

W pracy [37] uzyskane zostało twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania $x(\cdot)$ oraz o różniczkowalnej zależności tego rozwiązania od parametru funkcyjnego $u(\cdot)$ dla różniczkowo-całkowego zadania Cauchy'ego typu Volterry

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}x(t) = \int_a^t \Phi(t,s,x(s))ds + u(t), \ t \in [a,b] \text{ p.w.} \\ I^{1-\alpha}_{a+}x(a) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Podobnie, jak w pracy [40], dowód tego twierdzenia oparty został na twierdzeniu o dyfeomorfizmie, pochodzącym z pracy [35].

W pracy [45] badane są zagadnienia analogiczne jak w pracy [37], ale dla problemu

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}x(t) + \int_a^t \Phi(t,s,x(s),u(s))ds = f(t,x(s),v(s)), \ t \in [a,b] \text{ p.w.} \\ I^{1-\alpha}_{a+}x(a) = 0 \end{cases}$$

z dwoma parametrami funkcyjnymi $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, działającymi na układ w sposób nieliniowy (w przypadku układu (9) sterowanie $u(\cdot)$ działa na układ w sposób liniowy). Z powodu tej nieliniowości nie można skorzystać z twierdzenia o dyfeomorfizmie. Można natomiast zastosować twierdzenie o globalnej funkcji uwikłanej uzyskane w pracy [41], które jest uogólnieniem na operatory nieliniowe (względem parametru) twierdzenia o dyfeomorfizmie (por. rozdział 1.4.6).

Kolejne dwie prace, [67] i [68], dotyczą równań różniczkowych cząstkowych ułamkowego rzędu z pochodnymi w sensie Riemanna-Liouville'a. W pracy [67] badany jest ułamkowy wariant układu (12), a mianowicie

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+,x}z^1 = f^1(x,y,z^1,z^2,u) \\ D^{\beta}_{c+,y}z^2 = f^2(x,y,z^1,z^2,u) \end{cases} \tag{10}$$

p.w. na $P = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} (I^{1-\alpha}_{a+,x}z^1)(a,y) = 0, \ y \in [c,d] \text{ p.w.} \\ (I^{1-\beta}_{c+,y}z^2)(x,c) = 0, \ x \in [a,b] \text{ p.w.} \end{cases} \tag{11}$$

gdzie $(\alpha,\beta) \in (0,1] \times (0,1]$, $f^1 : P \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n_1}$, $f^2 : P \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n_2}$, (tutaj $D^{\alpha}_{a+,x}$, $D^{\beta}_{c+,y}$ i $I^{1-\alpha}_{a+,x}$, $I^{1-\beta}_{c+,y}$ oznaczają pochodne Riemanna-Liouville'a i całki ułamkowego rzędu względem odpowiednich zmiennych). Główny wynik pracy, obok twierdzenia o całkowej reprezentacji funkcji posiadającej odpowiednią ułamkową pochodną cząstkową, to twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania $(z^1(\cdot), z^2(\cdot))$ powyższego problemu oraz o ciągłej zależności rozwiązania od sterowania $u(\cdot)$. W pracy [68] badany jest z kolei ułamkowy wariant układu (13), t.zn.

$$D^{\alpha,\beta}_{a+,x,c+,y}z(x,y) = f(x,y,z(x,y), D^{\alpha}_{a+,x}z(x,y), D^{\beta}_{c+,y}z(x,y), u(x,y)), \ (x,y) \in P \text{ a.e.},$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} I^{1-\alpha,1-\beta}_{a+,x,c+,y} z(x,c) = \gamma(x), \ x \in [a,b] \\ I^{1-\alpha,1-\beta}_{a+,x,c+y} z(a,y) = \delta(y), \ y \in [c,d] \end{cases}$$

gdzie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\delta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ są funkcjami absolutnie ciągłymi, spełniającymi warunek $\gamma(a) = \delta(c)$, natomiast $D^{\alpha,\beta}_{a+,x,c+,y} z$, $D^{\alpha}_{a+,x} z$, $D^{\beta}_{x,c+,y} z$ oraz $I^{1-\alpha,1-\beta}_{a+,x,c+,y} z$ są odpowiednimi pochodnymi cząstkowymi w sensie Riemanna-Liouville'a i ułamkową całką funkcji $z(\cdot)$. W pracy wprowadzone zostało pojęcie mieszanej pochodnej cząstkowej $D^{\alpha,\beta}_{a+,x,c+,y} z$ rzędu (α, β) i wyprowadzone zostało twierdzenie o całkowej reprezentacji funkcji posiadających taką pochodną. Także i tutaj udowodnione zostało twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania $z(\cdot)$ powyższego zadania i jego ciągłej zależności od sterowania $u(\cdot)$. Twierdzenie egzystencjalne dla powyższego problemu, przy założeniu, że prawa strona układu nie zależy od pojedynczych pochodnych i przy nieco innej definicji ułamkowej pochodnej mieszanej, można znaleźć w pracy [VG].

1.4.4 Prace dotyczące teorii sterowania optymalnego

Teorią sterowania optymalnego zajmowałem się w kontekście zagadnienia istnienia rozwiązań optymalnych i warunków koniecznych optymalności pierwszego rzędu. Przedmiotem moich zainteresowań były głównie następujące układy sterowania o parametrach rozłożonych:

$$\begin{cases} \frac{\partial z^1}{\partial x} = f^1(x, y, z^1, z^2, u) \\ \frac{\partial z^2}{\partial y} = f^2(x, y, z^1, z^2, u) \end{cases} \tag{12}$$

dla $(x, y) \in P$ p.w., z warunkami początkowymi

$$z^1(0, y) = 0, \ z^2(x, 0) = 0$$

dla $x, y \in [0, 1]$ oraz

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, u). \tag{13}$$

dla $(x, y) \in P$ p.w., z warunkami początkowymi

$$z(x, 0) = 0, \ z(0, y) = 0$$

dla $x, y \in [0, 1]$ (w niektórych pracach powyższe układy rozważane są z niezerowymi warunkami początkowymi)([5]). Ponadto, badałem układy sterowania o parametrach rozłożonych postaci (14) (por. str. 21), a także zwyczajne układy sterowania drugiego rzędu z nieskończonym horyzontem postaci (6) i (15) (por. str. 22).

[5]układ (13) nazywany jest układem Goursata-Darboux; dyskretne odpowiedniki układów (12) i (13) znane są w literaturze dotyczącej sterowania automatycznego jako układy Roessera i Fornasiniego-Marchesiniego

Układy cząstkowe Układy postaci (12) znajdują zastosowanie do opisu procesów chemicznych zachodzących w reaktorach ze zmieniającą się aktywnością katalizatora. Naturalną przestrzenią rozwiązań (w sensie Caratheodory'ego) dla tych układów jest produkt przestrzeni funkcji absolutnie ciągłych względem odpowiednich zmiennych. Funkcje takie można także określić (z dokładnością do reprezentacji p.w.) przy pomocy pochodnych uogólnionych i traktować jako elementy odpowiednich przestrzeni typu Sobolewa.

W pracy [10] wyprowadzone są twierdzenia o istnieniu jednoznacznego rozwiązania i o ciągłej zależności rozwiązań od sterowań dla układu (12) oraz o istnieniu rozwiązania optymalnego dla liniowego nieautonomicznego układu postaci (12) rozważanego z całkowym nieliniowym funkcjonałem kosztu, przy założeniu wypukłości funkcji podcałkowej względem zespołu zmiennych stanu i sterowania. Praca [13] zawiera dowód zasady maksimum dla zadania sterowania optymalnego, opisanego przez układ (12) i całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu. Zasada ta ma charakter punktowy, a układ sprzężony jest liniowym układem typu (12).

W pracy [MS] uzyskane jest twierdzenie o istnieniu jednoznacznego rozwiązania oraz o ciągłej zależności rozwiązań od sterowań dla układu (12) z warunkami brzegowymi rozumianymi w sensie całkowym, badanego przy pomocy pojęcia pochodnej uogólnionej i pojęcia śladu funkcji. Warto nadmienić, że w dowodzie twierdzenia egzystencjalnego w pracy [MS] wykorzystuje się twierdzenie o zwężającym k - krotnym złożeniu od-wzorowania, natomiast w pracy [10] używamy pojęcia metryki Bieleckiego i twierdzenia Banacha o odwzorowaniu zwężającym. Metoda oparta na pojęciu metryki Bieleckiego pozwala uniknąć kłopotliwych rachunków prowadzących do pewnych oszacowań dla k - krotnego złożenia badanego odwzorowania. Twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązań od sterowań uzyskane w pracy [MS] ma silniejsze założenia i silniejszą tezę, aniżeli twierdzenie uzyskane w pracy [10]. W pracy [VS] uzyskana jest zasada maksimum dla zadania związanego z funkcjonałem kosztu zależnym jedynie od rozwiązania i rozważanego w klasie sterowań kawałkami ciągłych oraz w specjalnej klasie rozwiązań.

W pracy [44] rozważany jest m.in. szczególny przypadek układu (12) postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial z^1}{\partial x} = h^1(x,y,z^2) + B^1(x,y)u^1 \\ \frac{\partial z^2}{\partial y} = h^2(x,y,z^1) + B^2(x,y)u^2 \end{cases}$$

z zerowymi warunkami początkowymi i funkcjonałem kosztu

$$J(u) = \int_P f^0(x,y,z_u^1(x,y),z_u^2(x,y),u^1(x,y),u^2(x,y))dxdy \to \min.,$$

gdzie $(z_u^1(\cdot),z_u^2(\cdot))$ jest rozwiązaniem układu odpowiadającym sterowaniu $(u^1(\cdot),u^2(\cdot))$. Zadanie to rozważane jest w niestandardowych przestrzeniach rozwiązań (absolutnie ciągłych względem zespołu zmiennych) i sterowań (absolutnie ciągłych względem odpowiednich zmiennych). Przy założeniu wypukłości funkcji f^0 względem zmiennych (u^1,u^2) wyprowadzone jest twierdzenie o istnieniu rozwiązania powyższego zadania.

Zadanie sterowania optymalnego opisane przez układ (12) i całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu, przy punktowych warunkach końcowych nałożonych na rozwiązanie, badane jest w pracach [52], [53] i [19]. Rozważanie punktowych warunków końcowych oznacza konieczność badania układu w przestrzeniach rozwiązań i sterowań takich, jak w pracy [44]. W pracy [52] uzyskane zostały warunki konieczne optymalności dla liniowego autonomicznego układu typu (12). Założenie liniowości i autonomiczności pozwoliły sprowadzić badany problem do układu typu (13)([6]). W pracy [53] badany jest układ (12) nieliniowy względem zmiennej stanu. W konsekwencji nie można sprowadzić go do układu (13). W tym przypadku warunki konieczne optymalności otrzymane są przy pomocy zasady ekstremum dla zadania gładko-wypukłego. W pracy [19], w przypadku liniowym nieautonomicznym, wyprowadzone są twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań od sterowań i o istnieniu rozwiązania optymalnego.

Układy postaci (13), znajdujące zastosowanie do opisu procesu absorbcji gazu i suszenia ([TS]), badane były przez wielu autorów. W pracy [AO], dla układu bez zmiennej sterującej, udowodnione jest istnienie klasycznego rozwiązania (tzn. posiadającego ciągłe odpowiednie pochodne cząstkowe) i zbadana ciągła zależność rozwiązań od warunków początkowych i prawej strony równania. Naturalną przestrzenią rozwiązań dla układów zawierających sterowanie jest przestrzeń funkcji posiadających stosowną reprezentację całkową (rozwiązania w sensie Caratheodory'ego). Taką reprezentację posiadają funkcje absolutnie ciągłe dwóch zmiennych zdefiniowane w pracy [Wal1] przy pomocy pojęcia absolutnie ciągłej funkcji przedziału([7]). W pracach [Sur1], [Sur2], [Sur3] przestrzeń rozwiązań określona jest jako przestrzeń typu Sobolewa, opisana przy pomocy pochodnych uogólnionych. Można pokazać, że elementy takiej przestrzeni (z dokładnością do reprezentacji p.w.) posiadają stosowną reprezentację całkową.

W pracy [PS1] uzyskane jest twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności lokalnego rozwiązania układu (13), natomiast w pracy [Sur3] (por. także [Sur1]) udowodnione jest twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności globalnego rozwiązania tego układu, w sensie Caratheodory'ego. Dowód tego twierdzenia oparty jest na twierdzeniu o zwężającym k - krotnym złożeniu odwzorowania. W pracy [7], istnienie i jednoznaczność rozwiązania uzyskane zostało przy pomocy metryki Bieleckiego i twierdzenia Banacha o punkcie stałym, co, podobnie jak w przypadku układu (12), pozwoliło znacznie uprościć dowód.

Głównym wynikiem pracy [7] jest twierdzenie o istnieniu rozwiązań optymalnych dla układu (13) rozważanego w klasie sterowań dwóch zmiennych o wahaniu

[6] w pracy [Pie] pokazana jest równoważność obu układów w przypadku liniowym autonomicznym

[7] Niezależnie, pojęcie funkcji absolutnie ciągłej dwóch zmiennych wprowadzone zostało także w pracy [BG], przy czym w pracy tej autor nie używa pojęcia funkcji przedziału; niektórzy autorzy funkcjami absolutnie ciągłymi dwóch zmiennych nazywają wprost funkcje posiadające odpowiednią reprezentację całkową (por. np. [PS1]). Zaletą definicji podanej w pracy [Wal1], jest wskazówka do zdefiniowania w analogiczny sposób, czyli przy pomocy pojęcia funkcji przedziału skojarzonej z funkcją dwóch zmiennych (wzorem funkcji jednej zmiennej) funkcji o wahaniu skończonym dwóch zmiennych ([6]).

skończonym na P ([6]), z całkowym nieliniowym funkcjonałem kosztu. Twierdzenie to uzyskane jest w oparciu o wyprowadzoną w pracy zasadę wyboru Helly'ego dla funkcji dwóch zmiennych o wahaniu skończonym, analogiczną do zasady Helly'ego dla funkcji jednej zmiennej. Zasada ta spotkała się z zainteresowaniem specjalistów z zakresu teorii funkcji rzeczywistych ([BBCh], [Ch], [ChT1], [ChT2], [ChT3]). W pracy [5] rozważany jest przypadek funkcjonału zależnego także od wartości wahania sterowania u na zbiorze P.

W pracy [8] uzyskane jest twierdzenie o istnieniu rozwiązań optymalnych dla nieliniowego układu (13) rozważanego z funkcjonałem kosztu zawierającym nieliniowy składnik całkowy i składnik zależny od szybkości zmian sterowania oraz od liczby jego przeł ączeń. Wynik ten jest rozszerzeniem twierdzenia egzystencjalnego otrzymanego w pracy [3] dla liniowego układu typu (13) i funkcjonału kosztu zawierającego liniowy składnik całkowy oraz zależnego od szybkości zmian sterowania. W pracy [3], poza istnieniem rozwiązań optymalnych, wyprowadzona została także zasada maksimum dla badanego problemu.

W pracy [11] udowodnione jest twierdzenie o istnieniu rozwiązań optymalnych dla zadania opisanego przez liniowy nieautonomiczny układ (13) i nieliniowy funkcjonał kosztu, będący sumą trzech składników całkowych, przy czym funkcje podcałkowe zależą w sposób wypukły, poza zmiennymi sterowania i stanu, także od zmiennych reprezentujących pochodne cząstkowe rozwiązania. Zadanie to rozważane jest w klasie sterowań sumowalnych, przyjmujących wartości w ustalonym zbiorze zwartym i wypukłym. W takiej same klasie sterowań, w pracy [17], rozważany jest liniowy nieautonomiczny układ (13) wraz z całkowym funkcjonałem kosztu, w przypadku, gdy funkcja podcałkowa jest wypukła jedynie względem zmiennej sterowania. Wprowadzone jest tutaj pojęcie rodziny funkcji dwóch zmiennych jednakowo absolutnie ciągłych, a następnie podana jest charakteryzacja takiej rodziny i udowodnione twierdzenie Arzela-Ascoli dla funkcji dwóch zmiennych absolutnie ciągłych. Udowodnione jest też twierdzenie orzekające, że z dowolnego ciągu rozwiązań, odpowiadających sterowaniom z rozważanej klasy, można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie do rozwiązania odpowiadającego pewnemu sterowaniu i taki, że ciągi odpowiednich pochodnych cząstkowych tych rozwiązań są zbieżne słabo w przestrzeni funkcji sumowalnych do pochodnych rozwiązania granicznego. Stąd uzyskane jest twierdzenie o istnieniu rozwiązania optymalnego badanego zadania.

Istnienie rozwiązania zadania sterowania optymalnego dla ogólniejszego układu, ale rozważanego z funkcjonałem kosztu typu Mayera, zależnym jedynie od wartości rozwiązania w punkcie „końcowym", uzyskane jest w pracy [Sur2], przy założeniu wypukłości tzw. zbioru prędkości. W szczególności oznacza to, że nie można porównać rezultatu uzyskanego w pracy [17] oraz rezultatu uzyskanego przez sprowadzenie zadania z całkowym funkcjonałem kosztu do zadania z funkcjonałem kosztu zależnym tylko od wartości rozwiązania w punkcie „końcowym" i zastosowanie wyniku uzyskanego w pracy [Sur2].

W pracy [55] badane są układy dodatnie typu (13), tzn. układy, których rozwiązania są nieujemne, o ile nieujemne są sterowania. W pierwszej części pracy podane są warunki gwarantujące „dodatniość" układu nieliniowego. W drugiej części udowodnione jest twierdzenie o istnieniu rozwiązania optymalnego dla zadania opisanego przez układ dodatni, liniowy względem pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu, i całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu, przy założeniu wypukłości tzw. zbioru uogólnionych prędkości postaci (16) (por. str. 23). Należy zaznaczyć, że w uzyskanym twierdzeniu nie nakłada się warunku Lipschitza względem zmiennej stanu na funkcję podcałkową występującą w funkcjonale kosztu, natomiast zastosowanie metody polegającej na sprowadzeniu zadania z całkowym funkcjonałem kosztu do zadania z funkcjonałem kosztu zależnym tylko od wartości rozwiązania w punkcie „końcowym" i zastosowaniu wyniku uzyskanego w pracy [Sur2], prowadzi do takiego założenia. Warto także dodać, że dowód przedstawiony w pracy [55] ma charakter bezpośredni, podczas gdy w pracy [Sur2] wykorzystywane jest zaawansowane narzędzie w postaci twierdzenia o dolnym domknięciu.

W pracy [4] wyprowadzona jest zasada maksimum dla zadania opisanego przez n-wymiarowy układ typu (13) (nieliniowy jedynie względem zmiennej stanu), punktowe warunki końcowe nałożone na rozwiązanie i całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu. W przypadku ogólnym układ sprzężony dany jest w postaci równania całkowego, natomiast przy pewnych dodatkowych założeniach przyjmuje on postać liniowego układu typu (13). Warunki konieczne dla dwuwymiarowego zadania opisanego przez układ (13) i funkcjonał kosztu zależny jedynie od wartości rozwiązania w punkcie „końcowym", bez punktowych warunkĂłw końcowych, uzyskane są w pracach [Sur1], [PS2], [Sr] (w pracy [Sr] rozważana jest klasa sterowań kawałkami ciągłych względem każdej zmiennej).

W pracy [23] badany jest problem ciągłej zależności zbioru rozwiązań zadania sterowania optymalnego od danych występujących w opisie tego zadania, dla układów postaci (13) (liniowych i nieliniowych). Zależność ta opisana jest przy pomocy pojęcia górnej granicy ciągu zbiorów.

W pracy [57] badany jest układ (13) na przedziale nieograniczonym postaci $[0, \infty) \times [0, \infty)$, w klasie rozwiązań lokalnie absolutnie ciągłych i sterowań lokalnie sumowalnych. Inspiracją do podjęcia badań nad takimi układami była teoria sterowania optymalnego dla układów zwyczajnych z nieskończonym horyzontem, której poświęcona jest monografia [CH]. W pierwszej części pracy uzyskane jest twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania oraz badana jest kwestia „dodatniości" układu. W drugiej części pracy wprowadzone są różne pojęcia optymalności rozwiązań badanego układu, związane z funkcjonałami kosztu typu całkowego. Wskazane są zależności między tymi pojęciami i udowodniona jest t.zw. zasada optymalności. Z zasady tej wynika, ogólnie mówiąc, że niektóre spośród badanych rodzajów optymalności (na przedziale $[0, \infty) \times [0, \infty)$) pociągają za sobą „skończoną" optymalność, oznaczającą optymalność na każdym skończonym podprzedziale $[0, X] \times [0, Y]$ przedziału $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

W pracach [59], [26], [32] badany jest układ równań różniczkowych cząstkowych postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} = A_0 z + A_1 \frac{\partial z}{\partial t} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x} + B_0 w + k \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D_0 w + E_0 z + E_1 \frac{\partial z}{\partial t} + l \end{cases} \tag{14}$$

dla $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, 1]$ p.w., z warunkami brzegowymi

$$z(t, 0) = \varphi(t) \text{ dla } t \in [0, \infty),$$
$$w(0, x) = \psi(x) \text{ dla } x \in [0, 1],$$

gdzie $z, k \in \mathbb{R}^n$, $w, l \in \mathbb{R}^m$. Powyższy układ jest ciągłym odpowiednikiem procesów powtarzalnych, zarówno dyskretnych, jak i dyskretno-ciągłych. Układy postaci (14) nie były wcześniej badane przez innych autorów. W omawianej pracy uzyskane jest twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania (z, w) odpowiadającego sterowaniu (k, l) oraz twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązań od sterowań. W pracy [26] uzyskana jest zasada maksimum dla zadania opisanego przez liniowy i autonomiczny proces oraz funkcjonał kosztu zależny od funkcji końcowych. Uzyskany rezultat może być wykorzystany do badania sterowalności „funkcyjnej" procesów powtarzalnych. W pracy [32] otrzymane jest istnienie rozwiązania optymalnego dla zadania opisanego przez proces (14) (w omawianej pracy proces ten jest nazywany dwukierunkowo ciągłym procesem powtarzalnym) oraz całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu. Z otrzymanego twierdzenia wynika istnienie rozwiązania zadania rozważanego w pracy [26].

Układy zwyczajne Wyniki o istnieniu rozwiązania układu sterowania drugiego rzędu uzyskane w pracy [15] zastosowane zostały w tej pracy do wyprowadzenia, przy pomocy zasady ekstremum dla zadania gładko-wypukłego ([IT]), zasady maksimum dla zadania sterowania optymalnego, opisanego przez układ (5) z warunkami brzegowymi Dirichleta i całkowy nieliniowy funkcjonał kosztu postaci

$$J(u, \omega) = \int_I f^0(t, u(t), \dot{u}(t), \omega(t)) dt.$$

Zasada maksimum dla skalarnego ($n = 1$) problemu postaci

$$\frac{d}{dt} a(t, u, \dot{u}) = b(t, u, \dot{u}, \omega), \ t \in I \text{ p.w.},$$
$$u(0) = u(\pi) = 0,$$

z całkowym nieliniowym funkcjonałem kosztu i przy dodatkowych ograniczeniach typu równości i nierówności, uzyskana została w pracy [GR], w oparciu o metodę wariacji McShane'a.

Zasada maksimum uzyskana w pracy [15] wykorzystana została w pracy [30] do wyprowadzenia zasady maksimum dla zadania sterowania optymalnego związanego układem sterowania drugiego rzędu z nieskończonym horyzontem. W pracy [30] rozważane są, poza klasycznym, także inne rodzaje optymalności, a mianowicie silna optymalność, doganiająca optymalność, sporadycznie doganiająca optymalność i skończona optymalność. Udowodniona jest zasada optymalności orzekająca, że każdy z powyższych rodzajów optymalności, łącznie z klasyczną optymalnością, pociąga za sobą skończoną optymalność, oznaczającą optymalność na każdym skończonym przedziale $[0, T]$. Głównymi wynikami tej pracy są dwie zasady maksimum, uzyskane w oparciu o rezultaty otrzymane w pracy [15]. Pierwsza zasada dotyczy przypadku ogólnego rozważanego zadania, druga zaś - pewnego przypadku szczególnego. Drugie z wymienionych twierdzeń jest analogiczne do odpowiedniej zasady maksimum dla zadań sterowania optymalnego układami pierwszego rzędu z nieskończonym horyzontem ([CH]).

W pracach, [31] i [64] także badane są zadania sterowania optymalnego opisane przez zwyczajne układy drugiego rzędu z nieskończonym horyzontem.

W pracy [31] uzyskane jest istnienie rozwiązania optymalnego dla zadania sterowania optymalnego opisanego przez układ (6) w przypadku, gdy funkcja F jest liniowa względem ω i w ogólnym przypadku. Oba zadania rozważane są z nieliniowym całkowym funkcjonałem kosztu.

W pracy [64] badane jest zadanie sterowania optymalnego opisane przez układ sterowania postaci

$$\ddot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t), \ t \in [0, \infty) \text{ a.e.}, \tag{15}$$

i całkowy kwadratowy funkcjonał kosztu. Uzyskane są tu twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i ciągłej zależności rozwiązań od sterowań oraz o istnieniu rozwiązania optymalnego.

W pracy [56] badane jest, w klasie sterowań niemalejących, zadanie sterowania optymalnego opisane przez zwyczajny układ dodatni pierwszego rzędu (na skończonym przedziale) i funkcjonał kosztu typu Bolzy (w postaci sumy składnika całkowego i składnika punktowego). Uzyskane są tutaj, przy pomocy pojęcia Γ-zbieżności ciągu funkcjonałów i górnej granicy ciągu zbiorów, twierdzenia o istnieniu rozwiązań optymalnych i ich ciągłej zależności od danych występujących w opisie zadania.

W pracy [69] uzyskana została zasada maksimum dla zadania Bolzy związanego ze zwyczajnym równaniem różniczkowo-całkowym. Dowód oparty jest na metodzie Dubovitskiego-Miljutina, co pozwoliło uniknąć założeń o wypukłości względem zmiennej sterującej funkcji występujących w równaniu i funkcjonale kosztu. W podejściu alternatywnym, opartym na gładko-wypukłej zasadzie ekstremum Ioffe-Tikchomirova pewne założenia typu wypukłości występują. Należy dodać, że warunek minimum uzyskany w pracy [69] opisany jest przy pomocy gradientów funkcji występujących w równaniu i funkcjonale kosztu, natomiast warunek minimum otrzymany przy pomocy zasady ekstremum wyrażony jest przy pomocy samych funkcji.

Układy ułamkowe W pracach [42], [46] badanie są zadania liniowo-kwadratowe dla zwyczajnych układów sterowania ułamkowego rzędu z pochodnymi Riemanna-

Liouville'a i Caputo, odpowiednio. W przypadku układu z pochodną Caputo, funkcjonał kosztu, poza składnikiem punktowym zawiera także składniki funkcyjne. Główne wyniki tych prac, to wzory na gradienty badanych funkcjonałów kosztu, przy zadanych ograniczeniach i zastosowanie ich do dowodu zasad maksimum dla rozważanych zadań.

W pracy [50] badany jest zwyczajny nieliniowy układ sterowania zawierający pochodną Riemanna-Liouville'a

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}x(t) = f(t, x(t), u(t)), \ t \in [a, b] \text{ a.e.} \\ I^{1-\alpha}_{a+}x(a) = c \end{cases},$$

z całkowym funkcjonałem kosztu

$$\int_a^b f_0(t, x(t), u(t))ds \to \min .$$

i z ograniczeniem na sterowania w postaci

$$u(t) \in M \subset \mathbb{R}^m.$$

Istnienie rozwiązań powyższego zadania uzyskane zostało w pracach [Kam] i [PAT]. W pracy [Kam] założono liniową strukturę układu sterowania i wypukłość funkcji f_0 względem u, natomiast w pracy [PAT] założono, że f_0 jest wypukła względem (x, u) i $M = \mathbb{R}^m$. W omawianej pracy [50], przy pomocy „ułamkowego" lematu Gronwalla ([YGD]) i twierdzenia o funkcji uwikłanej dla odwzorowania wieloznacznego ([Kis]) udowodnione zostało twierdzenie o istnieniu rozwiązania optymalnego przy założeniu, że zbiór uogólnionych prędkości

$$\{(v_0, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \ v_0 = f_0(t, x, u), \ v = f(t, x, u) \text{ dla pewnego } u \in M\} \tag{16}$$

jest wypukły dla $t \in [a, b]$ p.w. i $x \in \mathbb{R}^n$.

W pracy [44] badana jest kwestia istnienia rozwiązań dla zadań związanych z układami typu Roessera ułamkowego i pierwszego rzędu, z całkowym funkcjonałem kosztu. Głównym wynikiem w zakresie problemów rzędu ułamkowego jest twierdzenie o istnieniu sterowania optymalnego dla układu liniowego rozważanego w klasie sterowań absolutnie ciągłych względem zespołu zmiennych, bez założenia o wypukłości funkcji podcałkowej opisującej funkcjonał kosztu.

1.4.5 Prace dotyczące teorii sterowalności

W ścisłym związku z teorią sterowania optymalnego pozostaje zagadnienie sterowalności układów.

Układy zwyczajne i cząstkowe W pracy [1], w oparciu o twierdzenie Browdera o punkcie stałym odwzorowania wieloznacznego, uzyskane są twierdzenia o sterowalności układu zwyczajnego pierwszego rzędu z ruchomego zbioru do ustalonego zbioru zwartego i wypukłego oraz z ustalonego punktu do tego samego punktu.

W pracy [2], przy pomocy twierdzenia Gravese'a ([Gra]) i twierdzenia o globalnej sterowalności liniowego autonomicznego układu typu (13) ([BBW]), uzyskany został warunek dostateczny dla lokalnej sterowalności nieliniowego autonomicznego układu tego typu. Badanie sterowalności punktowej układu (12) oznacza konieczność rozważania niestandardowych przestrzeni rozwiązań i sterowań. W pracy [51] otrzymane są wyniki dotyczące globalnej sterowalności liniowego autonomicznego układu typu (12), w oparciu o wspomniany wynik o sterowalności liniowego autonomicznego układu typu (13) i związek między liniowymi autonomicznymi układami typu (12) i (13). Uzyskane jest tu także twierdzenie o lokalnej sterowalności nieliniowego autonomicznego układu typu (12). Wyniki uzyskane w pracach [2] i [51] są tego samego typu, jak w przypadku układów zwyczajnych.

W pracy [54] wyprowadzona jest zasada bang-bang dla liniowego nieautonomicznego układu postaci (13) oraz udowodnione twierdzenie o aproksymatywnej sterowalności dla takiego układu, rozważanego z klasą sterowań kawałkami stałych. Oba twierdzenia są ważne z punktu widzenia praktycznych zastosowań. Dowód zasady bang-bang oparty na jest pojęciu całki Aumanna odwzorowania wieloznacznego, natomiast dowód twierdzenia aproksymacyjnego oparty jest na uzyskanym w pracy [54] uogólnieniu na przypadek funkcji dwóch zmiennych klasycznego twierdzenia, orzekającego, że funkcje sumowalne na przedziale $[a, b]$, przyjmujące wartości w ustalonym zbiorze M, można aproksymować w sensie L^1-metryki funkcjami kawałka-mi stałymi, przyjmującymi wartości w M ([Ba]). W pracy [22] wyprowadzona jest zasada bang-bang dla układu typu (13) nieliniowego względem sterowania. Z kolei w pracy [24] uzyskana jest zasada bang-bang dla nieautonomicznego układu liniowego (13), rozważanego ze sterowaniami o parametrach rozłożonych i sterowaniami brzegowymi. Także tutaj uzyskane jest twierdzenie aproksymacyjne dla sterowań kawał-kami stałych. W ostatniej części pracy rozważany jest układ nieliniowy, którego prawa strona nie zależy od pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Przy dodatkowym założeniu o liniowości prawej strony układu względem sterowania otrzymana jest aproksymacyjna zasada bang-bang dla sterowań o parametrach rozłożonych. W pracy [58] zaproponowany jest pewien algorytm numerycznego wyznaczania sterowań kawałkami stałych, o wartościach w ustalonym zbiorze M, posiadających własności implikowane przez twierdzenie aproksymacyjne, uzyskane w pracy [24]. Konstrukcja algorytmu oparta jest dowodzie twierdzenia udowodnionego w pracy [54], uogólniającego odpowiedni wynik jednowymiarowy z pracy [Ba], o którym mowa powyżej.

W pracy [25] uzyskana jest zasada bang-bang dla nieautonomicznego układu postaci (12) liniowego względem stanu i sterowania. W przypadku układu liniowego jedynie względem stanu uzyskane jest twierdzenie aproksymacyjne dla sterowań kawałkami stałych. Metoda zastosowana w pracy [25], podobnie, jak w pracy [54], oparta jest na pojęciu całki Aumanna.

W pracy [60] badany jest problem „dodatniości” układu postaci (12)([8]). Podane są warunki dostateczne na to, aby układ nieliniowy był dodatni. Następnie pokazane jest, że w przypadku układu liniowego warunki te są także warunkami koniecznymi. Oznaczają one (w przypadku układu liniowego), że wyrazy macierzy występujących po prawej stronie układu są nieujemne.

W pracy [62] badana jest tzw. sterowalność do zbioru (ograniczonego wielościanu w $\mathbb{R}^n$)([9]) zwyczajnego nieliniowego układu sterowania

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ t \in [0, T] \text{ p.w.},$$

rozważanego w klasie sterowań należących do ograniczonego wielościanu (funkcyjnego) rozpiętego na skończonej ilości ustalonych sterowań i o wierzchołku w ustalonym sterowaniu. Wyprowadzony jest tutaj, przy pomocy stopnia topologicznego, warunek dostateczny dla takiej sterowalności.

Procesy powtarzalne W pracy [61] badany jest ciągły proces powtarzalny (14) z funkcjami k i l zależnymi od sterowania u i $\varphi = 0$ (funkcja ψ, która występuje w warunku początkowym traktowana jest jako sterowanie brzegowe). W odróżnieniu od pracy [59] proces ten badany jest w przestrzeni absolutnie ciągłych sterowań (u, ψ) i trajektorii (z, w). Uzyskane wyniki o istnieniu, jednoznaczności i ciągłej zależności rozwiązań od sterowań pozwoliły wyprowadzić zasadę bang-bang dla badanego procesu.

W pracy [63] badana jest sterowalność liniowego różniczkowego procesu powtarzalnego postaci

$$\begin{cases} \dot{z}_{k+1}(t) = A_1 z_{k+1}(t) + A_2 w_k(t) + B u_{k+1}(t) \\ w_{k+1}(t) = C_1 z_{k+1}(t) + C_2 w_k(t) + D u_{k+1}(t) \end{cases}$$

dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le \alpha$ ($\alpha > 0$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą), z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} z_k(0) = d_k \text{ for } k \in \mathbb{N}, \\ w_0(t) = f(t) \text{ for } t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le \alpha, \end{cases}$$

gdzie $z_k(t) \in \mathbb{R}^n$, $w_k(t) \in \mathbb{R}^m$, $u_k(t) \in \mathbb{R}^r$, współczynniki występujące po prawej stronie układu są macierzami odpowiednich wymiarów, punkty $d_k \in \mathbb{R}^n$ i funkcja $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^n$ są dane. W omawianej pracy wprowadzone jest pojęcie punktowej sterowalności takiego procesu wzdłuż wszystkich pasów k (jest ich przeliczalna ilość) i udowodnione twierdzenie o gęstości w przestrzeni $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ zbioru $\mathcal{A}_{M,PC}$ punktów, do których można dosterować układ przy pomocy sterowań kawałkami stałych, przyjmujących wartości w ustalonym zwartym i wypukłym zbiorze M, w zbiorze $\mathcal{A}_M$

[8]nazywając układ (12) dodatnim, rozumiemy, że dla nieujemnych funkcji brzegowych i nieujemnego sterowania trajektoria i jej odpowiednie pochodne cząstkowe są nieujemne

[9]mówimy, że układ jest sterowalny do zbioru, jeśli jest sterowalny do każdego punktu tego zbioru

punktów, do których można dosterować układ przy pomocy sterowań mierzalnych, przyjmujących wartości w M ($\mathcal{A}_M = \overline{\mathcal{A}_{M,PC}}$).

Kontynuacją pracy [63] jest praca [27]. W oparciu o pewien wynik o sterowalności abstrakcyjnych układów sterowania, pochodzący z pracy [Kn], uzyskana jest m.in. następująca równość charakteryzująca punktową sterowalność procesów powtarzalnych wzdłuż wszystkich pasów k, przy założeniu, że zbiór wartości sterowań M jest zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^r$: $\mathcal{A}_M = \overline{\mathcal{A}_{exM,PC}}$, gdzie exM oznacza zbiór punktów ekstremalnych zbioru M. Jest to odpowiednik klasycznego wyniku tego typu dla zwyczajnych (skończonych) układów sterowania.

Także w pracy [29] kontynuowane są badania sterowalności różniczkowych procesów powtarzalnych. Uzyskany tutaj wynik jest nieskończenie wymiarowym odpowiednikiem twierdzenia o sterowalności do wielościanu, otrzymanego w pracy [62]. O ile w pracy [62] dowód zasadniczego twierdzenia oparty jest na pojęciu stopnia topologicznego, w omawianej pracy najpierw udowodniony jest nieskończenie wymiarowy wariant twierdzenia Poincaré-Mirandy, a następnie, opierając się na tym twierdzeniu, wyprowadzamy główny wynik o sterowalności procesów powtarzalnych do wielościanu (nieskończenie wymiarowego). Pomysł wykorzystania twierdzenia Poincaré-Mirandy do badania sterowalności do wielościanu pochodzi z pracy [BM].

W pracy [38] uzyskano twierdzenie orzekające, iż domknięcie zbioru punktów $(z_k(b))_{k\in\mathbb{N}}$, które można osiągnąć przy pomocy sterowań $\mathfrak{u} = (I_{a+}^{1-\alpha}v_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ z funkcjami v_k kawałkami stałymi i przyjmującymi wartości w ustalonym zwartym i wypukłym zbiorze $M \in \mathbb{R}^r$, jest równe zbiorowi punktów, które można osiągnąć przy pomocy sterowań z funkcjami v_k sumowalnymi z wartościami w M dla procesu

$$\begin{cases} {}^C D_{a+}^{\alpha} z_{k+1}(t) = A_1 z_{k+1}(t) + A_2 w_k(t) + B u_{k+1}(t) \\ w_{k+1}(t) = C_1 z_{k+1}(t) + C_2 w_k(t) + D u_{k+1}(t) \end{cases}$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} z_k(a) = c_k \text{ for } k \in \mathbb{N}, \\ w_0(t) = f(t) \text{ for } t \in [a, b], \end{cases} .$$

1.4.6 Prace dotyczące zagadnień podstawowych

Poza głównym nurtem badań zajmowałem się również zagadnieniami pokrewnymi natury podstawowej. Obok wspomnianych wcześniej:

- uogólnienia lematu Du Bois-Reymonda dla funkcji jednej zmiennej na przypadek warunków brzegowych typu macierzowo-okresowego i pochodnych rzędu k ([14])
- uogólnienia lematu Du Bois-Reymonda dla funkcji dwóch zmiennych spełniających warunki brzegowe typu Dirichleta na przypadek mieszanych pochodnych cząstkowych dowolnego rzędu ([12])

- charakteryzacji rodziny funkcji dwóch zmiennych jednakowo absolutnie ciągłych ([17])
- twierdzenia wyboru Helly'ego dla funkcji dwóch zmiennych o wahaniu skończonym ([6])
- wielowymiarowej wersji twierdzenia o aproksymacji funkcji sumowalnych funkcjami kawałkami stałymi ([54])
- nieskończenie wymiarowego wariantu twierdzenia Poincaré-Mirandy ([29])

badałem również

- ciągłość operatora superpozycji (Nemytskiego) na podprzestrzeni ([21])
- różniczkowalność (klasyczną i dystrybucyjną) funkcji dwóch zmiennych o wahaniu skończonym ([6], [16])
- dyfeomorfizmy działające z przestrzeni Banacha do przestrzeni Hilberta ([35])
- istnienie i własności globalnej funkcji uwikłanej ([41], [47])
- uogólnienia lematu Du Bois-Reymonda dla funkcji jednej zmiennej na przypadek pochodnych Riemanna-Liouville'a rzędu $\alpha \in (0, 1)$ i wyższego ([43], [36])
- przestrzenie typu Sobolewa funkcji mających pochodne Riemanna-Liouville'a, ich własności, włożenia i zwartość tych włożeń ([34], [65], [39])
- funkcje jednej zmiennej o ułamkowym wahaniu skończonym i ich zastosowanie do ułamkowych równań impulsowych ([48])

W pracy [21] udowodnione jest uogólnienie klasycznego twierdzenia Krasnoselskiego o operatorze superpozycji działającym między przestrzeniami L^p na przypadek, gdy operator ten określony jest na podprzestrzeni produktu skończonej ilości podprzestrzeni przestrzeni funkcji mierzalnych. Uzyskany wynik zastosowany został w pracy do badania ciągłej różniczkowalności funkcjonału całkowego określonego na produkcie przestrzeni Sobolewa funkcji jednej zmiennej.

W pracy [6] wprowadzone zostały pojęcia niemalejącej funkcji dwóch zmiennych i funkcji dwóch zmiennych o wahaniu skończonym na przedziale P oraz udowodnione twierdzenia o różniczkowalności p.w. (w sensie Frecheta) takich funkcji. Problem zdefiniowania funkcji dwóch zmiennych o wahaniu skończonym podejmowany był przez wielu autorów. Znane są m.in. definicje Tonellego, Vitaliego-Lebesgue'a-Frecheta-de la Vallee Poussina, Frecheta, Arzela, Hardy'ego-Krausego, Serrina. Punktem wyjścia dla definicji przyjętej w [6] było określenie funkcji absolutnie ciągłej dwóch zmiennych zaproponowane w pracy [Wal1]. Można pokazać, że definicja ta jest równoważna definicji zaproponowanej przez Hardy'ego i Krausego ([CA]) i pozwala udowodnić wiele twierdzeń analogicznych, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, m.in. wspomniane wcześniej twierdzenie o różniczkowalności p.w. oraz zasadę wyboru Helly'ego ([7]). Warto dodać ([Mos]), że zasada ta nie jest prawdziwa w klasie funkcji dwóch zmiennych o wahaniu skończonym w sensie Tonellego (podstawowym problemem jest tutaj „wielkość" zbioru, na którym wybrany podciąg jest zbieżny – pewna charakteryzacja tego zbioru, w przypadku definicji Tonellego, podana jest w pracy [Nad]). Podobnie jest w przypadku własności różniczkowalności – funkcja o wahaniu skończonym w sensie Tonellego może nie mieć różniczki w żadnym punkcie. Twierdzenie o różniczkowalności p.w. funkcji o wahaniu skończonym, wyprowadzone w pracy [6], można uzyskać, korzystając z pewnego ogólniejszego wyniku, udowodnionego w pracy [CC]. W pracy [6] przedstawiony jest bezpośredni dowód tego twierdzenia.

W pracy [16] wprowadzone zostało pojęcie funkcji dwóch zmiennych o wahaniu lokalnie skończonym, a następnie wyprowadzone twierdzenia charakteryzujące pochodne dystrybucyjne $D^{(1,1)}, D^{(1,0)}, D^{(0,1)}$ takiej funkcji. Uzyskane wyniki zastosowane zostały do udowodnienia twierdzenia o istnieniu rozwiązania liniowego cząstkowego równania autonomicznego drugiego rzędu z prawą stroną zawierającą pochodną dystrybucyjną $D^{(1,1)}$ funkcji dwóch zmiennych o wahaniu lokalnie skończonym. Twierdzenie to zilustrowane jest na przykładzie hiperbolicznego równania cząstkowego impulsowego, tj. równania, którego prawa strona zawiera deltę Diraca skupioną w ustalonym punkcie. Inspiracją do podjęcia badań w tym kierunku były odpowiednie rezultaty dla funkcji jednej zmiennej i zwyczajnych równań impulsowych, przedstawione w monografii [HW].

W pracy [35] wyprowadzone zostało twierdzenie o dyfeomorfizmie działającym z przestrzeni Banacha do przestrzeni Hilberta. Głównym założeniem, obok lokalnej odwracalności operatora, jest warunek (natury wariacyjnej) Palaisa-Smale'a nałożony na klasę odpowiednich funkcjonałów. Twierdzenie to ma charakter abstrakcyjny i daje nową metodę badania równań zależnych w sposób liniowy od parametru ([35], [37], [40]).

W pracy [41] twierdzenie o dyfeomorfizmie uogólnione zostało do twierdzenia o globalnej funkcji uwikłanej, wyznaczonej przez równanie

$$F(x, y) = 0$$

gdzie $F : X \times Y \to H$ (X, Y są przestrzeniami Banacha, H - przestrzeniÄ... Hilberta), y - zmienną niezależną (parametrem), x - zmienną zależną. Przy pomocy tego twierdzenia można badać istnienie, jednoznaczność i różniczkowalność zależności rozwiązania od parametru dla równań zależnych w sposób nieliniowy od parametru ([41], [45]). Pewne uogólnienie tego twierdzenia udowodnione zostało w pracy [47]. Główna zmiana w stosunku do pracy [41] polega na zastąpieniu bijektywności operatora $F'_x(x, y) : X \to H$ w punktach (x, y) takich, że $F(x, y) \neq 0$, warunkiem $F(x, y) \notin (\operatorname{Im} F'_x(x, y))^{\perp}$ (podprzestrzeń prostopadła). W pracy podany jest przykład pokazujący, że warunek ten jest spełniony, podczas, gdy różniczka nie jest bijekcją.

Głównymi wynikami pracy [43] są lemat Du Bois-Reymonda dla funkcji jednej zmiennej posiadających pochodne Riemanna-Liouville'a rzędu α sumowalne z potęgą p przy założeniu, że $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ oraz twierdzenie o całkowaniu przez części dla funkcji jednej zmiennej posiadających pochodne Riemanna-Liouville'a rzędu α sumowalne z potęgą p i q przy założeniu, że $\frac{1}{p} < \alpha < 1$, $\frac{1}{q} < \alpha < 1$, uwzględniające składniki „punktowe". Szczególny przypadek tego twierdzenia, dla funkcji będących funkcjami pierwotnymi rzędu α funkcji sumowalnych (z odpowiednią potęgą), jest wynikiem klasycznym, który można znaleźć w monografii [SKM]. Ponadto, w pracy [43] podana została charakteryzacja (reprezentacja całkowa) funkcji posiadających pochodne Riemanna-Liouville'a rzędu $\alpha \in (0,1)$. Uzyskany lemat Du Bois-Reymonda rzędu α może być, podobnie, jak w przypadku pochodnych całkowitego rzędu, stosowany w metodzie wariacyjnej badania równań różniczkowych do analizy regularności słabego rozwiązania. Wyniki uzyskane w pracy [43] wykorzystane zostały do wyprowadzenia równania Eulera-Lagrange'a wraz z warunkami brzegowymi dla funkcjonału Bolzy określonego na przestrzeni funkcji posiadających pochodną Riemanna-Liouville'a rzędu α, a także do wykazania istnienia rozwiązania problemu brzegowego

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{b-}D^{\alpha}_{a+}x(t) + x(t) = f(t), \ t \in [a,b] \text{ a.e.} \\ (I^{1-\alpha}_{a+}x)(a) = x_a, \ x(b) = x_b \end{cases},$$

gdzie $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, w przestrzeni funkcji posiadających pochodną Riemanna-Liouville'a rzędu α sumowalną z drugą potęgą.

Wyniki z pracy [43] przeniesione zostały na przypadek pochodnych wyższego w pracy [36]. Dokładniej, uzyskany został lemat Du Bois-Reymonda dla pochodnych rzędu $\alpha \in (n - \frac{1}{2}, n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ oraz twierdzenie całkowaniu przez części - dla $\alpha \in (n-1, n)$, $\frac{1}{\alpha - n + 1} < p, q < \infty$. Ponadto, podana została reprezentacja całkowa funkcji posiadających pochodne Riemanna-Liouville'a dowolnego rzędu α.

W pracach [34], [65] zbadano zanurzenia przestrzeni $AC^{\alpha,p}_{a+}$ funkcji jednej zmiennej posiadających pochodne Riemanna-Liouville'a rzędu α sumowalne z potęgą p. W pracy [34] podana jest pełna charakteryzacja zbioru par (α, β), dla których zachodzi relacja

$$AC^{\alpha,1}_{a+} \subset AC^{\beta,1}_{a+}.$$

Głównym wynikiem pracy [65] jest zwartość powyższych zanurzeń.

Praca [39] ma charakter fundamentalny. W pracy tej wprowadzone zostały ułamkowe przestrzenie Sobolewa funkcji jednej zmiennej przy pomocy pojęcia pochodnej Riemanna-Louville'a. W szczególnym przypadku, a mianowicie, gdy $\alpha \in \mathbb{N}$, przestrzenie te redukują się do klasycznych przestrzeni Sobolewa funkcji jednej zmiennej. W pracy zdefniowane zostały słabe pochodne ułamkowego rzędu, przy pomocy funkcji próbnych $\varphi \in C^{\infty}_c(a,b)$ (funkcje klasy C^{∞} ze zwartymi nośnikami). Pokazane zostało, że pochodne te tożsame są z pochodnymi Riemanna-Louville'a. Wprowadzone zostały także dwa rodzaje norm w przestrzeniach ułamkowch i wykazana ich równoważność. Ważnymi wynikami pracy są także twierdzenia o zanurzaniu ułamkowych przestrzeni Sobelewa i o zwartości niektórych zanurzeń, w tym o zwartości zanurzeń przestrzeni Sobolewa w przestrzeniach funkcji sumowalnych. Ponadto, wykazana została zupełność, refleksywność i ośrodkowość ułamkowych przestrzeni Sobolewa.

Praca [48], w części dotyczącej klasy funkcyjnej, może być traktowana jako kontynuacja pracy [39] (por. także [16]). W pracy tej wprowadzone jest pojęcie funkcji o α-wahaniu skończonym i podana jest charakteryzacja takich funkcji. Następnie, wprowadzone jest pojęcie słabej σ-addytywnej pochodnej rzędu α i udowodnione jest twierdzenie orzekające, iż funkcja sumowalna ma słabą σ-addytywną pochodną rzędu α wtedy i tylko wtedy, gdy ma skończone α-wahanie. W klasycznym przypadku $\alpha = 1$ twierdzenie to redukuje się do charakteryzacji funkcji posiadającej dystrybucyjną pochodną wyznaczoną przez σ-addytywną funkcję zbioru. W drugiej części pracy [48] udowodnione jest twierdzenie o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego liniowego ze słabą σ-addytywną pochodną rzędu α funkcji niewiadomej, którego prawa strona zawiera słabą σ-addytywną pochodną rzędu α zadanej funkcji o α-wahaniu skończonym. Wyprowadzony jest też wzór Cauchy'ego na rozwiązanie takiego równania, spełniające zadany warunek początkowy. Wyniki te zastosowane są do wyznaczenia rozwiązania równania różniczkowego z σ-addytywną pochodną rzędu α funkcji niewiadomej, którego prawa strona zawiera deltę Diraca skupioną w jednym bądź skończonej ilości punktów. Praca prezentuje jedno z dwóch podejść do równań impulsowych, stosowanych w literaturze, w którym przez rozwiązanie rozumie się funkcję o wahaniu skończonym spełniającą równanie w sensie dystrybucyjnym. Podejście to stosowane było także w pracy [16], w ślad za monografią [HW]. W przypadku układów z pochodną rzędu ułamkowego taka metoda nie była stosowana przez innych autorów. Do układów ułamkowych stosowana była metoda alternatywna, polegająca na określeniu wartości skoków rozwiązania w ustalonych chwilach w postaci warunków początkowych, z rozwiązaniem rozumianym jako funkcja, która jest kawałkami różniczkowalna ([AABH], [BS], [BHN], [LBS], [SP]).

1.4.7 Uwagi końcowe

Do najważniejszych wyników zaliczam:

- twierdzenie o dyfeomorfizmie i globalnej funkcji uwikłanej jako narzędzie badania równań funkcyjnych ([35], [41])
- twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań od prawej strony dla półliniowego równania operatorowego ([18])
- definicja przestrzeni Sobolewa ułamkowego rzędu oparta na pochodnej Riemanna-Liouville'a i wykazanie identyczności pochodnych dystrybucyjnych ułamkowego rzędu i pochodnych Riemanna-Liouville'a ([39])
- definicja funkcji o wahaniu α-skończonym i charakteryzacja jej pochodnej dystrybucyjnej ([48])

- definicja funkcji dwóch zmiennych o wahaniu skończonym i zasada wyboru Helly'ego dla takich funkcji ([6], [7])

- charakteryzacja pochodnych dystrybucyjnych funkcji dwóch zmiennych o wahaniu lokalnie skończonym ([16])

- uogólnienia lematu Du Bois-Reymonda ([12], [14], [43])

- uogólnienie warunku koercytywności na jądrze (4) na przypadek układu rzędu $2k$ ([14])

- nieskończenie wymiarowy wariant twierdzenia Poincaré-Mirandy ([29])

- zasada bang-bang i twierdzenie aproksymacyjne w klasie sterowań kawałkami stałych dla układu Goursata-Darboux ([54])

- zasady maksimum dla zwyczajnych układów drugiego rzędu na przedziale ograniczonym i nieograniczonym ([15], [30])

- uogólnienie twierdzenia Krasnoselskiego ([21])

- twierdzenie aproksymacyjne w klasie sterowań kawałkami stałych dla różniczkowych procesów powtarzalnych ([27])

- pojęcie asymptotycznej stabilności rozwiązania zerowego układu drugiego rzędu w sensie wariacyjnym i twierdzenie o takiej stabilności ([28])

1.4.8 Literatura

[AABH] N. Abada, R. P. Agarwal, M. Benchohra, H. Hammouche, *Impulsive semilinear neutral functional differential inclusions with multivalued jumps*, Applications of Mathematics 56 (2) (2011), 227-250.

[ACV] M. Allen, L. Caffarelli, A. Vasseur, *Porous medium flow with both a fractional potential pressure and fractional time derivative*, Chinese Annals of Mathematics 38 (1) (2017), 45-82.

[ALP] S. Ahmad, A. C. Lazer, J. L. Paul, *Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at rezonance*, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 933-944.

[AO] A. Alexiewicz, W. Orlicz, *Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$, Studia Mathematica XV (2) (1956), 201-215.

[Ba] A. Bacciotti, *Linear systems with piecewise constant controls*, Bolletino U. M. I. (5), 18-A (1981), 102-105.

[BT] R. L. Bagley, P. J. Torvik, *On the fractional calculus model of Viscoelastic behaviour,* Journal of Rheology 30 (1) (1986), 133-155.

[BS] D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Systems with Impulsive Effect. Stability, Theory and Applications.* Horwood, Chichister, 1989.

[BBCh] M. Balcerzak, S. A. Belov, V. V. Chistyakov, *On Helly's principle for metric semigroup valued BV mappings of two real variables*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 66 (2) (2002), 245-257.

[BHN] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas, *Impulsive Differential Equations and Inclusions,* Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.

[BBW] J. Bergmann, P. Burgmeier, P. Weiher, *Explicit controllability criteria for Goursat problems*, Optimization 20 (3) (1989), 281-290.

[BG] E. Berkson, T. A. Gillespie, *Absolutely continuous functions of two variables and well-bounded operators*, J. London Math. Soc. 30 (2) (1984), 305-321.

[BL] S. R. Bernfeld, V. Lakshmikantham, *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems*, New York, London, 1974.

[BM] Bors, D., M. Majewski, "*On the controllability to the interval of the system governed by a hyperbolic equation*", Kybernetes 38 (7/8) (2009), 1178-1186.

[Bo] L. Bourdin, *Existence of a weak solution for fractional Euler-Lagrange equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 399 (2013), 239-251.

[CH] D. A. Carlson, A. Haurie, *Infinite Horizon Optimal Control, Theory and Applications*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 290, Springer-Verlag, New York, 1987.

[CC] Y. Chabrillac, J.-P. Crouzeix, *Continuity and differentiability properties of monotone real functions of several variables*, Math. Programming Study 30 (1987), 1–16.

[Ch] V. V. Chistyakov, *Superposition operators in the algebra of functions of two varaiables*, Monatshefte fur Mathematik 137 (2) (2002), 99-114.

[ChT1] V. V. Chistyakov, Y. V. Tretyachenko, *Selection principles for maps of several variables*, Doklady Mathematics 81 (2) (2010), 282-285.

[ChT2] V. V. Chistyakov, Y. V. Tretyachenko, *Maps of several variables of finite total variation. I. Mixed differences and the total variation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 370 (2) (2010), 672-686.

[ChT3] V. V. Chistyakov, Y. V. Tretyachenko, *Maps of several variables of finite total variation. II. E. Helly-type pointwise selection principles*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 369 (1) (2010), 82-93.

[CA] J. A. Clarkson, C. R. Adams, *On definitions of bounded variation for functions of two variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933), 824-854.

[Ga] R. Gaines, *Continuous dependence for two-point boundary value problems*, Pacific J. Math. 28 (1969), 327-336.

[GR] M. Goebel, U. Raitums, *Constrained control of a nonlinear two point boundary value problem, I*, J. Global Optim. 4 (1994), 367-395.

[Gra] L. M. Graves, *Some mapping theorems*, Duke Math. J. 17 (1950), 111–114.

[HW] A. Halanay, D. Wexler, *Kaczestwiennaja Teoria Impulsnych Sistem*, Moscov, 1971.

[Ing] S. K. Ingram, *Continuous dependence on parameters and boundary data for nonlinear two-point boundary value problems*, Pacific J. Math. 41 (1972), 395-408.

[IT] A. D. Ioffe, V. M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland, 1979.

[Kam] R. Kamocki, *On the existence of optimal solutions to fractional optimal control problems*, Appl. Math. Comput. 235 (2014), 94-104.

[Kis] M. Kisielewicz, Differential Inclusions and Optimal Control, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, PWN, Warszawa, 1991.

[Kla] G. Klassen, *Dependence of solutions on boundary conditions for second order ordinary differential equations*, J. Differential Equations 7 (1970), 24-33.

[Kn] G. Knowles, *Lyapunov vector measures*, SIAM J. Control 13 (2) (1975), 294-303.

[LBS] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differntial Equations*, Worlds Scientific, Singapore, 1989.

[La] T. A. M. Langlands, *Solution of a modified fractional diffusion equation*, Physica A, Statistical Mechanics and its Applications 367 (2006), 136-144.

[Le] H. Leiva, *Existence of bounded solutions of a second-order system with dissipation*, J. Math. Anal. Appl. 237 (1999), 288-302.

[LP] A. Lepin, W. Ponomariev, *Continuous dependence of solutions of the boundary value problem for ordinary differential equations*, Diferencialnyje Urawnienija 9 (4) (1973), 626-629.

[MS] E. A. Markin, A. S. Strekalowskii, *O suszcziestwowanii, jedinstwiennosti i ustojcziwosti rieszenia dla odnowo klasa dinamiczeskich sistem opisywajuszczich chimiczeskije procesy*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, Seria Vyczislitelnoj Matematiki i Kibernetiki 4 (1977), 3–11.

[Maw] J. Mawhin, *Metody Wariacyjne dla Nieliniowych Problemów Dirichleta*, WNT, Warszawa, 1994.

[MW] J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems,* Springer-Verlag, New York, 1989.

[MZ] J. Mawhin, F. Zanolin, *A continuation approach to fourth order superlinear periodic boundary value problems*, Toplogical Methods in Nonlinear Analysis 2 (1) (1993), 55-74.

[Mos] P. P. Mosolov, *O problemie minimuma funkcjonała*, Izwestija AN SSSR Ser. Matem. 31 (6) (1967), 1289–1310.

[Nad] N. S. Nadiraszwili, *Princip wybora Helly dla funkcij dwóch peremennych*, Westnik Moskowsk. Uniwersiteta, Matematika 3 (1975), 3–10.

[OZ] P. Omari, F. Zanolin, *On forced nonlinear oscillations in n-th order differential systems with geometric condotions*, Nonlinear Anal. 8 (1984), 723-748.

[Pie] W. Pieczka, *On the general solution of some partial differential equations in two–variables domain*, Demonstratio Mathematica VII (4) (1974), 451-462.

[PS1] W. I. Płotnikov, W. I. Sumin, *Problemy ustojcziwosti nieliniejnych system Goursat-Darboux*, Diferencjalnyje Urawnienija VIII (5) (1972), 845–856.

[PS2] W. I. Płotnikov, W. I. Sumin, *Optimizacja obiektow z raspriedielonnymi parametrami, opisywajemych sistemami Goursat-Darboux*, Żurnal Wyczislitielnoj Matematiki i Matematiczeskoj Fiziki 12 (1) (1972), 61–77.

[PAT] S. Pooseh, R. Almeida, D. F. M. Torres, *Fractional order optimal control problems with free terminal time*, J. Ind. Manage. Optim. 10 (2014), 363-381.

[SKM] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.

[SP] A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1995.

[Se1] S. Sędziwy, *Dependence of solutions on boundary data for a system of two ordinary differential equations*, J. Differential Equations 9 (1971), 381-389.

[Se2] S. Sędziwy, *Bounded solutions of second order systems of differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 281 (2003), 697-706.

[Sr] W. A. Sroczko, *Uslowija optimalnosti tipa principa maksimuma w sistemach Goursat-Darboux*, Sibirskij Matematiczeskij Żurnal XXV (1) (1984), 126–132.

[Sur1] M. B. Suryanarayana, *Necessary conditions for optimization problems with hyperbolic partial differential equations*, SIAM J. Control 11 (1) (1973), 130–147.

[Sur2] M. B. Suryanarayana, *Existence theorems for optimization problems concerning hyperbolic partial differential equations*, Journal of Optimization Theory and Applications 15 (4) (1975), 361-392.

[Sur3] M. B. Suryanarayana, *A Sobolev space and a Darboux problem*, Pacific J. Math. 69 (2) (1977), 535-550.

[TS] A. N. Tichonov, A. A. Samarskii, *Urawnienija Matematiczeskoj Fiziki*, Moskwa, 1964.

[VK] N. Vasiliev, J. Klokov, *Osnowy Teorii Granicznych Zadacz dla Obyknowiennych Difieriencialnych Urawnienij,* Riga, 1978.

[VS] O. V. Vasiliew, V. A. Sroczko, K optimizacii odnowo klasa upravlaemych procesov s raspredelonnymi parametrami, Sib. Mat. J. XIX (2) (1978).

[VG] A. N. Vityuk and A. V. Golushkov, *Existence of solutions of systems of partial differential equations of fractional order*, Nonlinear Oscillations 7 (3) (2004), 318–325.

[Wal1] S. Walczak, *Absolutely continuous functions of several variables and their applications to differential equations*, Bull. Polish Acad. Sci. 35 (11-12) (1987), 733-744.

[Wal2] S. Walczak, *On the Du Bois-Reymond lemma for functions of several variables*, Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B 45 (3) (1993), 225-235.

[Wal3] S. Walczak, *On the continuous dependence on parameters of solutions of the Dirichlet problem. Part I. Coercive case, Part II. The case of saddle points*, Bulletin de la Classe des Sciences de l'Academie Royale de Belgique 6 (7–12) (1995), 247–273.

[WE] S. Westerlund, L. Ekstam, *Capacitor theory*, IEEE Trans. actions on Dielectics and Electrical Insulation 1 (5) (1994), 826-839.

[YGD] H. Ye, J. Gao, Y. Ding, *A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation*, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 1075-1081.

1.5 Cytowania prac

W bazie MathSciNet uwzględniono 48 publikacji. Prace te są cytowane 148 razy (115 razy bez autocytowań) przez 82 autorów. Indeks Hirscha wynosi $H = 8$.

W bazie Scopus uwzględniono 43 publikacje. Prace te są cytowane 247 razy (187 razy bez autocytowań) w 163 dokumentach. Indeks Hirscha wynosi $H = 10$.

Poniżej, podany jest wykaz cytowanych prac uwzględniający liczby cytowań wg w/w baz (w nawiasie podane są liczby cytowań bez autocytowań). Numeracja prac jest zgodna z numeracją przyjętą w rozdziałach 1.1 i 1.2.

[35] D. Idczak, A. Skowron, S. Walczak, *On the diffeomorphisms between Banach and Hilbert spaces*, Advanced Nonlinear Studies 12 (2012), 89–100.

MathSciNet: **17** (**13**)

Scopus: **24** (**20**)

[33] D. Idczak, R. Kamocki, *On the existence and uniqueness and formula for the solution of R-L fractional Cauchy problem in* $\mathbb{R}^n$, Fractional Calculus and Applied Analysis 14 (4) (2011), 538-553.

MathSciNet: **11** (**7**)

Scopus: **20** (14)

[18] D. Idczak, *Stability in semilinear problems*, J. Differential Equations 162 (2000), 64-90.

MathSciNet: **19** (**19**)

Scopus: **18** (**18**)

[21] D. Idczak, A. Rogowski, *On a generalization of Krasnoselskii's theorem*, J. Austral. Math. Soc. 72 (2002), 389-394.

MathSciNet: **10** (**9**)

Scopus: **18** (**17**)

[7] D. Idczak, S. Walczak, *On Helly's theorem for functions of several variables and its applications to variational problems*, Optimization 30 (1994), 331-343.

MathSciNet: **10** (**10**)

Scopus: **16** (**15**)

[36] D. Idczak, M. Majewski, *Fractional fundamental lemma of order* $\alpha \in (n - 1/2, n)$ *with* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Dynamic Systems and Applications 21 (2012), 251-268.

MathSciNet: **8** (**4**)

Scopus: **15** (**8**)

[39] D. Idczak, S. Walczak, *Fractional Sobolev spaces via Riemann-Liouville derivatives,* Journal of Function Spaces and Applications, vol. 2013, Article ID 128043, 15 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/128043.

MathSciNet: **7** (**6**)

Scopus: **13** (**12**)

[43] L. Bourdin, D. Idczak, *A fractional fundamental lemma and fractional integration by parts formula - Applications to critical points of Bolza functionals and to linear boundary value problems*, Advances in Differential Equations 20 (3-4) (2015), 213-232.

MathSciNet: **9** (**3**)

Scopus: **12** (**8**)

[15] D. Idczak, *Optimal control of a coercive Dirichlet problem*, SIAM J. Control Optim. 36 (4) (1998), 1250-1267.

MathSciNet: **9** (**6**)

Scopus: **10** (**6**)

[41] D. Idczak, *A global implicit function theorem and its applications to functional equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B 19 (8) (2014), 2549-2556.

MathSciNet: **7** (**5**)

Scopus: **10** (**8**)

[37] D. Idczak, A. Skowron, S. Walczak, *Sensitivity of a fractional integro-differential Cauchy problem of Volterra type*, Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, Article ID 129478, 8 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/129478.

MathSciNet: **7** (**6**)

Scopus: **7** (**6**)

[22] D. Idczak, *Bang-bang principle for linear and nonlinear Goursat-Darboux problems*, Int. J. Control 76 (11) (2003), 1089-1094.

MathSciNet: **3** (**3**)

Scopus: **7** (**5**)

[38] D. Idczak, R. Kamocki, *Fractional differential repetitive processes with Riemann-Liouville and Caputo derivatives*, Multidimensional Systems and Signal Processing 26 (2015), 193-206, DOI 10.1007/s11045-013-0249-0, published online: 25.09.2013.

MathSciNet: **3** (**1**)

Scopus: **7** (**5**)

[34] D. Idczak, S. Walczak, *A fractional imbedding theorem*, Fractional Calculus and Applied Analysis 15 (3) (2012), 418-425.

MathSciNet: **3** (**1**)

Scopus: **6** (**2**)

[2] D. Idczak, S. Walczak, *On the controllability of nonlinear Goursat systems*, Optimization 23 (1992), 91-98.

MathSciNet: **0** (**0**)

Scopus: **6** (**5**)

[24] D. Idczak, S. Walczak, *On some properties of Goursat-Darboux systems with distributed and boundary controls*, Int. J. Control 77 (9) (2004), 837-846.

MathSciNet: **1** (**1**)

Scopus: **5** (**3**)

[46] D. Idczak, S. Walczak, *On a linear-quadratic problem with Caputo derivative*, Opuscula Mathematica 36 (1) (2016), 49-68.

MathSciNet: **3** (**3**)

Scopus: **4** (**4**)

[47] D. Idczak, *On a generalization of a global implicit function theorem*, Advanced Nonlinear Studies 16 (1) (2016); DOI: 10.1515/ans-2015-5008.

MathSciNet: **1** (**0**)

Scopus: **4** (**3**)

[6] D. Idczak, *Functions of several variables of finite variation and their differentiability*, Annales Polonici Mathematici LX.1 (1994), 47-56.

MathSciNet: **4** (**4**)

Scopus: praca nie jest uwzględniona w bazie

[13] D. Idczak, *Necessary optimality conditions for a nonlinear continuous n-D Roesser model*, Mathematics and Computers in Simulation 41 (1996), 87-94.

MathSciNet: **0** (**0**)

Scopus: **4** (**2**)

[29] D. Idczak, M. Majewski, *A generalization of the Poincare-Miranda theorem with an application to the controllability of nonlinear repetitive processes*, K. Gałkowski and E. Rogers (Eds.): Recent Developments on Multidimensional Systems, Control and Signals – Theory and Applications, ASIAN J. Control 12 (2) (2010), 1-9.

MathSciNet: **2** (**2**)

Scopus: **3** (**3**)

[23] D. Idczak, M. Majewski, S. Walczak, *Stability analysis of solutions to an optimal control problem associated with a Goursat-Darboux problem*, K. Gałkowski, R. W. Longman, E. Rogers (Eds.): Multidimensional Systems nD and Iterative Learning Control, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 13 (1) (2003), 29-44.

MathSciNet: **3** (**3**)

Scopus: praca nie jest uwzględniona w bazie

[45] D. Idczak, S. Walczak, *Application of a global implicit function theorem to a general fractional integro-differential system of Volterra type*, Journal of Integral Equations and Applications 27 (4) (2015), 521-554.

MathSciNet: **1** (**1**)

Scopus: **2** (**2**)

[49] T. Kaczorek, D. Idczak, *Cauchy formula for the time-varying linear systems with Caputo derivative*, Fractional Calculus and Applied Analysis 20 (2) (2017), 494-505; DOI: 10.1515/fca-2017-0025.

MathSciNet: **1** (**1**)

Scopus: **2** (**2**)

[14] D. Idczak, *M-periodic problem of order 2k*, Topological Methods in Nonlinear Analysis 11 (1998), 169-185.

MathSciNet: **2** (**2**)

Scopus: praca nie jest uwzględniona w bazie

[17] D. Idczak, S. Walczak, *On the existence of a solution for some distributed optimal control hyperbolic system*, Internat. J. Math. & Math. Sci., vol. 23, no. 5 (2000), 297-311.

MathSciNet: **2** (**2**)

Scopus: praca nie jest uwzględniona w bazie

[25] D. Idczak, M. Majewski, *Bang-bang controls and piecewise constant ones for continuous Roesser system*, Multidimensional Systems and Signal Processing 17 (2006), 243-255.

MathSciNet: **0** (**0**)

Scopus: **2** (**2**)

[32] D. Idczak, M. Majewski, *Existence of optimal solutions of two-directionally continuous linear repetitive processes*, Multidimensional Systems and Signal Processing 23 (2012), 155-162, DOI: 10.1007/s11045-010-0105-4; published online: 7.04.2010.

MathSciNet: **0** (**0**)

Scopus: **2** (**2**)

[26] D. Idczak, *Maximum principle for optimal control of two-directionally continuous linear repetitive processes*, E. Zerz and K. Galkowski (Eds.): Recent Advances in Multidimensional Systems and Signals, Multidimensional Systems and Signal Processing 19 (2008), 411-423.

MathSciNet: **0** (**0**)

Scopus: **2** (**1**)

[16] D. Idczak, *Distributional derivatives of functions of two variables of finite variation and their application to an impulsive hyperbolic equation*, Czechoslovak Mathematical Journal 48 (123) (1998), 145-171.

MathSciNet: **1** (**0**)

Scopus: **1** (**0**)

[42] D. Idczak, S. Walczak, *Optimization of a fractional Mayer problem – existence of solutions, maximum principle, gradient methods*, Opuscula Mathematica 34 (4) (2014), 763-775.

MathSciNet: **1** (**0**)

Scopus: **1** (**0**)

[1] D. Idczak, *Applications of the fixed point theorem to problems of controllability*, Bulletin de la Societe des Sciences et des Lettres de Lodz, vol. XXXIX.3, no. 57 (1989), 1-7.

MathSciNet: **1** (**1**)

Scopus: praca nie jest uwzględniona w bazie

[8] D. Idczak, K. Kibalczyc, S. Walczak, *On an optimization problem with cost of rapid variation of control*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 36 (1994), 117-131.

MathSciNet: **1** (**1**)

Scopus: praca nie jest uwzględniona w bazie

[9] D. Idczak, S. Walczak, *On the existence of the Carathodory solutions for some boundary value problems*, Rocky Mountain J. Math. 24 (1) (1994), 1-13.

MathSciNet: **0** (**0**)

Scopus: **1** (**1**)

[55] D. Idczak, M. Majewski, *Nonlinear positive 2D systems and optimal control*, L. Benvenuti, A. De Santis and L. Farina (Eds.): Positive Systems - Proceedings of the First Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 2003), Lecture

MathSciNet: **1** (**1**)

Scopus: praca nie jest uwzględniona w bazie

[27] D. Idczak, *Approximative piecewise constant bang-bang principle for differential repetitive processes*, Int. J. Control 82 (5) (2009), 910-917.

MathSciNet: **0** (**0**)

Scopus: **1** (**0**)

1.6 Projekty badawcze

1.6.1 Kierowanie projektami badawczymi

1. Kierownik w projekcie badawczym NCN Nr DEC-2011/01/B/ST7/03426 „*Jednowymiarowe i dwuwymiarowe układy sterowania optymalnego niecałkowitego rzędu*", 2011-2014

1.6.2 Udział w projektach badawczych

1. Wykonawca w projekcie badawczym KBN 2 1102 91 01 „*Układy opisane równaniami zwyczajnymi i cząstkowymi oraz ich optymalizacja*", 1991-1994

2. Wykonawca w projekcie badawczym KBN 8T 11A01109 „*Układy dwuwymiarowe ciągłe i układy Dirichleta oraz ich optymalizacja*", 1995-1998

3. Wykonawca w projekcie badawczym KBN 2 PO 3A05910 „*Metody wariacyjne w badaniach równań różniczkowych: istnienie, zależność od parametrów i symulacja rozwiązań*", 1996-1998

4. Wykonawca w projekcie badawczym KBN 7 T11A 004 21 „*Badanie układów ciągłych n-wymiarowych, istnienie rozwiązań i stabilność procesów optymalnych*", 2001-2004

5. Wykonawca w projekcie badawczym MNiSW N514 027 32/3630 „*Badanie układów ciągłych i dyskretno-ciągłych ze sterowaniem*", 2007-2010

1.7 Udział w konferencjach naukowych (z wygłoszeniem referatu)

1.7.1 Wykaz konferencji

1. The Twelfth International Conference on Nonlinear Oscillations, Kraków, Polska, 1990
2. Dwudziesta Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, Polska, 1991
3. Dwudziesta Druga Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, Polska, 1993
4. International Conference - Optimal Control of Differential Equations, Athens, USA, 1993
5. 16th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Compiegne, Francja, 1993
6. International Symposium on Signal Processing, Robotics and Neural Networks, Lille, Francja, 1994
7. The International Conference on the Theory and Methods of Optimization and their Applications, Spała, Polska, 1994
8. Minisemestr - Topological and Variational Methods of Nonlinear Analysis, Międzynarodowe Centrum Stefana Banacha, Warszawa, Polska, 1994
9. Second International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Polska, 1995
10. The Second World Congress of Nonlinear Analysts, Ateny, Grecja, 1996
11. Third International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Polska, 1996
12. Workshop on Manufacturing Systems: Modelling, Management and Control, Wiedeń, Austria, 1997
13. Sixth International Colloquium on Numerical Analysis and Computer Sciences with Applications, Plovdiv, Bułgaria, 1997
14. I Forum Równań Różniczkowych, Będlewo, Polska, 1998
15. The First International Workshop on Multidimensional (nD) Systems, Łagów, Polska, 1998
16. International Congress of Mathematicians, Berlin, Niemcy, 1998

17. 2nd Symposium on Nonlinear Analysis, Toruń, Polska, 1999
18. The Third World Congress of Nonlinear Analysts, Catania, Włochy, 2000
19. The Second International Workshop on Multidimensional (nD) Systems, Czocha, Polska, 2000
20. 8th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Szczecin, Polska, 2002
21. 15th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, University of Notre Dame, Indiana, USA, 2002
22. First Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 2003), Rzym, Włochy, 2003
23. Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgia, 2004
24. IV-te Polskie Sympozjum Analizy Nieliniowej, Łódź, Polska, 2004
25. Fourth International Workshop on Multidimensional (nD) Systems NDS 2005, Wuppertal, Niemcy, 2005
26. 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japonia, 2006
27. 2007 International Workshop on Multidimensional (nD) Systems, Aveiro, Portugalia, 2007
28. 23rd IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization, Kraków, Polska, 2007
29. Fifth World Congress of Nonlinear Analysts, Orlando, USA, 2008
30. 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Budapeszt, Węgry, 2010
31. II Sesja Naukowa - Ułamkowy Rachunek Różniczkowy i Jego Zastosowania, Częstochowa, Polska, 2010
32. III Seminarium Naukowe Rachunek Różniczkowy Niecałkowitego rzędu i Jego Zastosowania, Białystok, Polska, 2011
33. IV Seminarium Naukowe Rachunek Różniczkowy Niecałkowitego Rzędu i Jego Zastosowania, Warszawa, 2012
34. 17th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2012, Międzyzdroje, Polska, 2012

35. 18th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2013, Międzyzdroje, Polska, 2013

36. Dynamical Systems and Applications, The Conference in Honor of Prof. Avner Friedman, Lódź, Polska, 2013

37. V Konferencja Naukowa Rachunek Różniczkowy Niecałkowitego Rzędu i Jego Zastosowania, Kraków, Polska, 2013

38. Dynamical Systems with Applications II, Łódź, Polska, 2014

39. VI Konferencja Naukowa Rachunek Różniczkowy Niecałkowitego Rzędu i Jego Zastosowania, Opole, Polska, 2014

40. 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madryt, Hiszpania, 2014

41. Joint Meeting of the German Mathematical Society and the Polish Mathematical Society, Poznań, Polska, 2014

42. 3rd Conference on Dynamical Systems and Applications, Łódź, Polska, 2015

43. 7th Conference on Non-Integer Order Calculus and Its Applications, Szczecin, Polska, 2015

44. VII Symposium on Nonlinear Analysis, Toruń, Polska, 2015

45. Equadiff 2017, Bratysława, Słowacja, 2017

46. The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Taipei, Taiwan, 2018

1.7.2 Wykłady plenarne i zaproszone, organizacja sesji konferencyjnych

- Wykład plenarny „*Funkcje dwóch zmiennych absolutnie ciągłe i o wahaniu skończonym oraz ich zastosowanie do równań różniczkowych cząstkowych*", IV-te Polskie Sympozjum Analizy Nieliniowej, Łódź, Polska, 2004

- Wykład zaproszony „*Some continuous 2D systems and their applications*", Sixth International Colloquium on Numerical Analysis and Computer Science with Applications, Plovdiv, Bulgaria, 1997

- Wykład zaproszony „*Stability analysis of two-dimensional optimal control systems*", The Third World Congress of Nonlinear Analysts, Catania, Włochy, 2000

- Wykład zaproszony „*Controllability of repetitive processes*", Fifth World Congress of Nonlinear Analysts, Orlando, USA, 2008

- Wykład zaproszony „*A global implicit function theorem and its applications*”, 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madryt, Hiszpania, 2014
- Wykład zaproszony „*A bipolynomial fractional Dirchlet-Laplace problem*”, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Taipei, Taiwan, 2018
- Organizacja (wspólnie z Markiem Majewskim) sesji zaproszonej „*2D systems*” w ramach 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Budapeszt, Węgry, 2010

1.7.3 Wykłady w ośrodkach zagranicznych

- Southern Illinois University at Edwardsville, Illinois, USA, 1993
- Washington University, St. Louis, Missouri, USA, 1993

2 Osiągnięcia w zakresie opieki naukowej i kształcenia młodej kadry

2.1 Promotorstwo w przewodach doktorskich zakończonych nadaniem stopnia

1. Marek Majewski, *Stabilność rozwiązań układów różniczkowych i układów sterowania*, Uniwersytet Łódzki, 2003
2. Dominika Bogusz, *Optymalizacja układów Goursata-Darboux z nieskończonym horyzontem*, Uniwersytet Łódzki, 2008
3. Rafał Kamocki, *Pewne ułamkowe układy sterowania zwyczajne i o parametrach rozłożonych i ich optymalizacja*, Uniwersytet Łódzki, 2012 - **rozprawa wyróżniona** przez Radę Wydziału Matematyki i Informatyki UŁ.

2.2 Promotorstwo w aktualnie otwartych przewodach doktorskich

1. Kamil Pajek, *Sterowanie optymalne układami różniczkowymi, całkowymi i różniczkowo-całkowymi ułamkowego rzędu,* Uniwersytet Łódzki

2.3 Sporządzone recenzje w przewodach doktorskich

1. Marek Galewski, *Zadania dwupunktowe dla pewnych klas nieliniowych równań operatorowych*, Uniwersytet Łódzki, 2002

2. El Desouky Ramo, *Strongly subregular functions and their applications in optimization*, Uniwersytet Łódzki, 2004

3. Andrzej Skowron, *Punkty krytyczne typu półkoercytywnego i ich zastosowania*, Uniwersytet Łódzki, 2005

4. Marjan Jakšto, *Układy eliptyczne ze sterowaniem określone w zbiorach nieograniczonych*, Uniwersytet Łódzki, 2006

5. Katarzyna Szymańska, *Wybrane asymptotyczne zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych zwyczajnych*, Uniwersytet Łódzki, 2006

6. Jan Pustelnik, *Aproksymacja wartości optymalnej funkcjonału Bolzy*, Uniwersytet Łódzki, 2009

7. Anna Michalak, *Dualne podejście do problemu stabilności typu Lapunowa*, Uniwersytet Łódzki, 2009

8. Mariusz Jurkiewicz, *Rezonansowe zagadnienie brzegowe Lidstone'a dla równań różniczkowych wyższych rzędów*, Uniwersytet Łódzki, 2009

9. Anna Kulig, *Nonlinear evolution inclusions and hemivariational inequalities for nonsmooth problems in contact mechanics*, Uniwersytet Jagielloński, 2009

10. Adrian Karpowicz, *Rozwiązania Caratheodory'ego hiperbolicznych równań i nierówności różniczkowo-funkcyjnych*, Uniwersytet Gdański, 2010

11. Jiangfeng Han, *Evolutionary multivalued hemivariational inequalities modeling dynamic unilateral contact problems*, Unwersytet Jagielloński, 2016

12. Igor Kossowski, *Zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych zwyczajnych z nieliniowymi warunkami nielokalnymi*, Politechnika Łódzka, 2018

2.4 Sporządzone recenzje w postępowaniach habilitacyjnych

1. Dorota Bors, Uniwersytet Łódzki, 2015

2. Anna Sikorska-Nowak, Uniwersytet Zielonogórski, 2016

3. Ewa Girejko, Politechnika Białostocka, 2018

3 Działalność popularyzująca naukę

3.1 Przekład dzieł naukowych

1. Tłumaczenie na język polski monografii: J. Mawhin, *Problemes de Dirichlet Variationnels Non Linéaires*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1987

(wspólnie z A. Nowakowskim i S. Walczakiem); dane bibliograficzne tłumaczenia polskiego: Jean Mawhin, *Metody Wariacyjne dla Nieliniowych Problemów Dirichleta*, WNT, Warszawa, 1994.

3.2 Inne formy aktywności popularyzującej naukę

1. odczyt dla uczniów i nauczycieli nt. „*O prostych zadaniach optymalizacyjnych*" zorganizowany przez Zarząd Oddziału Łódzkiego PTM, 2002
2. referat przeglądowy nt. „*Wybrane zagadnienia z zakresu teorii sterowania optymalnego układami hiperbolicznymi i eliptycznymi*" wygłoszony podczas Uroczystej Sesji Naukowej z okazji 10-lecia Wydziału Matematyki UŁ, 2006
3. odczyt nt. „*Ułamkowy rachunek różniczkowy*" w ramach cyklu „Okno na podwórze" organizowanego przez Zarząd Oddziału Łódzkiego PTM, 2010
4. odczyt nt. „*Pochodne Riemanna-Liouville'a i ułamkowe przestrzenie funkcyjne"* w ramach Seminarium Instytutu Matematyki Politechniki Łódzkiej, 2013
5. odczyt nt. „*O pewnym uogólnionym ułamkowym zadaniu Mayera z pochodną Caputo*" w ramach Seminarium Zastosowań Matematyki Oddziału PTM w Krakowie, 2014