Oddział Łódzki PTM serdecznie zaprasza na referat z cyklu

Łódzkie Forum Młodych Matematyków

Odczyt pt.

Funkcje kardynalne zbiorów osiągalnych

wygłosi w dniu 21 maja 2019 roku (wtorek) o godz. 16.15

w sali D103 na Wydziale Matematyki i Informatyki UŁ, ul. Banacha 22

dr Jacek Marchwicki

Uniwersytet Warmińsko Mazurski w Olsztynie,
Wydział Matematyki i Informatyki

Abstrakt.

Zbiorem osiagalnym szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazywamy zbiór wszystkich sum jego podszeregów $A(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$. Dla szeregów bezwzględnie zbieżnych o wyrazach dodatnich teoria zbiorów osiągalnych jest tożsama z teorią zbiorów wartości skończonych miar atomowych μ, co łatwo zauważyć przyjmując $\mu(\{n\}) = x_n$. Z charakteryzacji uzyskanej przez Guthrie i Nymanna wiemy, ze zbiory te są jednej z czterech możliwych postaci: zbiory skończone, sumy przedziałów domkniętych, zbiory homeomorficzne z Cantorem albo Cantorvale. Możemy rozważać problem na ile różnych sposobów uzyskiwane są elementy zbioru osiągalnego lub równoważnie patrząc z punktu widzenia miar - ile różnych zdarzeń ma konkretną miarę. Funkcję przypisującą punktom liczbę sposobów ich osiagnięcia nazywamy kardynalną.

Piękno zagadnienia potęguje fakt, ze niezależnie od hipotezy continuum, wartości te mieszczą się w zbiorze $\{0, 1, 2, ..., \omega, \mathfrak{c}\}$. Wynika to z faktu, że $F : \{0,1\}^{\omega} \mapsto A(x_n)$, przypisująca ciągom (ε_n) podszereg na nich osiągany, czyli $F(A) = \sum_{n \in A} x_n$, gdzie $A = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = 1\}$, jest ciągła. Stąd $W_x = F^{-1}(\{x\})$ jest domknięty w przestrzeni polskiej $\{0,1\}^{\omega}$, więc jest mocy ze zbioru $\{0, 1, 2, ..., \omega, \mathfrak{c}\}$.

Już ponad sto lat temu Kakeya pokazał, ze warunkiem wystarczajacym na to, by zbiór osiągalny był Cantorem jest zachodzenie nierówności $x_n > r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} x_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Natomiast gdy zachodzi nierówność przeciwna, to mamy do czynienia z sumami przedziałów domkniętych. Okazuje się, że Cantory uzyskane jako zbiory osiągalne szeregów, dla których nierówność $x_n > r_n$ zachodzi wszędzie, mają jednoznaczne przedstawienia swoich punktów, podczas gdy wiele punktów z sum przedziałów jednoznacznych być nie może. Warto zauważyć, ze problem ten zainteresował matematyków światowej klasy jak Erdösa, który uzyskał znaczące wyniki dla szeregów geometrycznych. Podanych zostanie wiele różnorodnych i niekiedy kłopotliwych przykładów, dowodzacych istnienia pewnych zbiorów wartości funkcji kardynalnych, natomiast wciąż brakuje metod efektywnego sposobu dowodzenia nie istnienia już nie nawet grupy przykładów, lecz pojedynczego przypadku. Stąd też tematyka posiada wciąż wiele otwartych i niezwykle prostych w sformułowaniu problemów jak chociażby to czy zbiór $\{1, 4\}$ jest zbiorem wartości funkcji kardynalnej pewnego szeregu.