# Geometria różniczkowa 2
# Wersja wstępna

Paweł Grzegorz Walczak

# Spis treści

# Rozdział 1

# Scena

## 1.1 Przegląd pojęć topologicznych

Podamy tu skompresowane masymalnie kompendium wiedzy z zakresu topologii ogólnej niezbędne do czytania naszego wykładu geometrii różniczkowej. Czytelnika nieusatysfakcjonowanego naszym "streszczeniem" odsyłamy do podręczników topologi, np. do książek Engelkinga [**En1**] czy [**En2**].

### 1.1.1 Pojęcia podstawowe

*Przestrzenią topologiczną* nazywamy parę $(X,\mathcal{U})$ złożoną ze zbioru $X$ i rodziny $\mathcal{U}$ zbiorów *otwartych* takiej, że zbiór pusty, cała przestrzeń $X$, suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych oraz iloczyn dowolnych dwu zbiorów otwartych są otwarte. Każdą taką rodzinę $\mathcal{U}$ nazywa się *topologią* w $X$. Często piszemy "przestrzeń topologiczna $X$" zamiast "przestrzeń topologiczna $(X,\mathcal{U}$", zwłaszcza wtedy, gdy łatwo się domyślić jaką topologię w $X$ mamy na myśli. Dopełnienia zbiorów otwartych nazywamy zbiorami *domkniętymi*. Tak więc, iloczyny dowolnych rodzin zbiorów domkniętych oraz sumy dowolnych dwu zbiorów domkniętych są domknięte. Największy zbiór otwarty zawarty w zbiorze $A \subset X$ nazywamy *wnętrzem* $A$ i oznaczamy symbolem $\mathrm{int}A$. Podobnie, najmniejszy zbiór domknięty zawierający $A$ nazywamy jego *domknięciem* i oznaczamy symbolem $\bar{A}$. Czytelnik z łatwością skompletuje elementarne własności operacji wnętrza i domknięcia wykorzystywane w tych wykładach.

*Podprzestrzenią* przestrzeni $(X,\mathcal{U})$ nazywamy dowolny zbiór $Y \subset X$ wraz z rodziną $\mathcal{U}|\mathcal{Y} = \{\mathcal{A} \cap \mathcal{Y}; \mathcal{A} \in \mathcal{U}\}$ zbiorów otwartych w $Y$. Podprzestrzeń ta jest otwarta (odp., domknięta), gdy $Y$ jest podzbiorem otwartym (odp., domkniętym) przestrzeni $X$.

*Bazą* przestrzeni topologicznej $(X,\mathcal{U})$ nazywamy każdą rodzinę $\mathcal{B}$ zbiorów otwartych taką, że każdy zbiór otwarty $U \in \mathcal{U}$ jest sumą zbiorów pewnej podrodziny rodziny $\mathcal{B}$.

*Produktem przestrzeni topologicznych* $X_1$ i $X_2$ jest produkt kartezjański $X_1 \times X_2$ z topologią, której bazę tworzą produkty $U_1 \times U_2$ zbiorów $U_i$ otwartych w $X_i$.

Przestrzeń $(X,\mathcal{U})$ nazywamy *przestrzenią Hausdorffa*, gdy każde dwa punkty zbioru $X$ posiadają rozłączne otoczenia otwarte. Oczywiście, dowolna podprzestrzeń oraz produkt przestrzeni Hausdorffa są też takimi przestrzeniami.

### 1.1.2 Przekształcenia ciągłe

Jeżeli $X$ i $Y$ są przestrzeniami topologicznymi i $f : X \to Y$, to przekształcenie $f$ nazywamy *ciągłym*, gdy przeciwobraz $f^{-1}(V)$ dowolnego zbioru otwartego $V \subset Y$ jest otwarty w $X$. Oczywiście, przekształcenie tożsamościowe $\mathrm{id}_X$ jest przekształceniem ciągłym przestrzeni $X$ na siebie, a złożenie dwu dowolnych przekształceń ciągłych jest też ciągłe.

Przekształcenia ciągłe przestrzeni topologicznej $X$ w naturalną przestrzeń $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych (której bazę tworzą wszystkie przedziały otwarte postaci $(a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$) nazywamy *funkcjami ciągłymi*. Funkcje stałe, sumy i iloczyny funkcji ciągłych na $X$ są ciągłe, a zatem zbiór wszystkich funkcji ciągłych na przestrzeni $X$ wraz z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia tworzy pierścień $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych.

Przekształcenie ciągłe i różnowartościowe przestrzeni $X$ na przestrzeń $Y$ nazywamy *homeomorfizmem*, gdy przekształcenie doń odwrotne jest też ciągłe. Przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ przestrzeni $X$ na przestrzeń $Y$ nazywamy *lokalnym homeomorfizmem*, gdy każdy punkt $x \in X$ posiada otoczenie otwarte $U$ przekształcane przez $f$ homeomorficznie na otwarty podzbiór $f(U)$ przestrzeni $Y$. Lokalny homeomorfizm jest homeomorfizmem, gdy jest przekształceniem różnowartościowym. Łatwo zuważyć, że złożenia homeomorfizmów (odp., lokalnych homeomorfizmów) są homeomorfizmami (odp., lokalnymi homeomorfizmami) oraz, że przekształcenia odwrotne do homeomorfizmów są też homeomorfizmami. Wynika stąd od razu, że homeomorfizmy danej przestrzeni topologicznej $X$ (wraz z działaniem składania przekształceń) tworzą grupę. Czytelnik z łatwością znajdzie przykłady przekształceń ciągłych i różnowartościowych oraz lokalnych homeomorfizmów, które nie są homeomorfizmami.

### 1.1.3 Zwartość i parazwartość

Rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru $X$ jest jego *pokryciem*, gdy $\cup\mathcal{A} = \mathcal{X}$. Przestrzeń Hausdorffa $(X,\mathcal{U})$ jest *zwarta*, gdy z każdego jej pokrycia otwartego można wybrać pokrycie skończone. Każda podprzestrzeń zwarta dowolnej przestrzeni Hausdorffa jest domknięta, a każda podprzestrzeń domknięta przestrzeni zwartej jest zwarta. Funkcje ciągłe na przestrzeni zwartej są ograniczone i osiągają swoje kresy: dla każdej takiej funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ istnieją punkty $x, y \in X$ takie, że $f(x) = \inf_X f$ i $f(y) = \sup_X f$.

Przestrzeń Hausdorffa jest *lokalnie zwarta*, gdy każdy jej punkt posiada otoczenie otwarte o zwartym domknięciu. Oczywiście, każda przestrzeń zwarta jest lokalnie zwarta, ale nie odwrotnie.

Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą dwoma rodzinami podzbiorów przestrzeni topologicznej $X$. Rodzina $\mathcal{A}$ jest *wpisana* w rodzinę $\mathcal{B}$, gdy każdy zbiór $A \in \mathcal{A}$ jest zawarty w pewnym zbiorze $B \in \mathcal{B}$. Rodzina $\mathcal{A}$ jest *lokalnie skończona*, gdy każdy punkt $x \in X$ posiada otoczenie otwarte $U$, które przecina conajwyżej skończoną liczbę zbiorów rodziny $\mathcal{A}$: $\#\{A \in \mathcal{A}; \mathcal{A} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\} < \infty$. Przestrzeń Hausdorffa $X$ jest *parazwarta*, gdy w każde jej pokrycie otwarte można wpisać pokrycie otwarte lokalnie skończone. I znowu, każda przestrzeń zwarta jest parazwarta, ale nie odwrotnie.

*Nośnikiem* funkcji ciągłej $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy domknięcie zbioru $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Nośnik funkcji $f$ oznaczamy symbolem $\operatorname{supp} f$. Rodzinę $\Phi$ nieujemnych funkcji ciągłych na przestrzeni topologicznej $X$ nazywamy *rozkładem jedności*, gdy rodzina $\{\operatorname{supp} \phi; \phi \in \Phi\}$ jest lokalnie skończona i $\sum_{\phi \in \Phi} \phi(x) = 1$ dla każdego $x \in X$. (Suma ta jest dobrze określona: Dla każdego $x$ redukuje się ona do skończonej liczby składników dodatnich.) Rozkład jedności $\Phi$ jest *podporządkowany* pokryciu otwartemu $\mathcal{U}$, gdy rodzina nośników funkcji $\phi \in \Phi$ jest wpisana w $\mathcal{U}$. Istotną dla naszego wykładu własnością przestrzeni parazwartych jest to, że

*przestrzeń Hausdorffa jest parazwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego jej pokrycia otwartego istnieje podporządkowany mu rozkład jedności.*

Każda przestrzeń parazwarta $X$ jest też *normalna*, tzn. dla dowolnych jej domkniętych i rozłącznych podzbiorów $A$ i $B$ istnieją jej podzbiory $U$ i $V$ otwarte, rozłączne oraz takie, że $A \subset U$ i $B \subset V$. Przestrzenie normalne mają następującą ważną dla nas własność:

*dla dowolnego lokalnie skończonego pokrycia otwartego* $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ *przestrzeni normalnej* $X$ *istnieje jej pokrycie* $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ *otwarte i takie, że* $\bar{V}_i \subset U_i$ *dla dowolnego* $i \in I$.

### 1.1.4 Spójność

Z określenia przestrzeni topologicznej wynika od razu, że zbiór pusty i cała przestrzeń są jednocześnie otwarte i domknięte. Przestrzeń topologiczna jest *spójna*, gdy nie zawiera innych zbiorów o tej własności. Innymi słowy, przestrzeń $X$ jest spójna, gdy nie można przedstawić jej w postaci sumy dwu rozłącznych podzbiorów otwartych i niepustych. Obraz przestrzeni spójnej w przekształceniu ciągłym jest spójny. Każda rzeczywista funkcja ciągła $f$ na przestrzeni spójnej $X$ ma *własność Darboux*: Jeżeli $x, y \in X$, $a \in \mathbb{R}$ i $f(x) < a < f(y)$, to istnieje punkt $z \in X$ taki, że $f(z) = a$. Odwrotnie, jeżeli każda funkcja ciągła na przestrzeni $X$ ma własność

Darboux, to $X$ jest przestrzenią spójną. Jedynymi niepustymi podprzestrzeniami spójnymi przestrzeni liczb rzeczywistych są przedziały (otwarte i domknięte, właściwe i niewłaściwe).

Przestrzeń $X$ jest *lokalnie spójna*, gdy dowolne otoczenie otwarte $U$ dowolnego punktu $x \in X$ zawiera spójne otoczenie otwarte tego punktu. Istnieją niespójne przestrzenie lokalnie spójne jak i przestrzenie spójne, które nie są lokalnie spójne.

Największy zbiór spójny zawierający ustalony punkt przestrzeni topologicznej nazywa się jej *składową spójności*. Składowe przestrzeni lokalnie spójnej są zbiorami otwartymi.

*Krzywą* w przestrzeni topologicznej $X$ nazywamy dowolne przekształcenie ciągłe przedziału $I \subset \mathbb{R}$ (otwartego lub domkniętego, właściwego lub nie) w przestrzeń $X$. Przestrzeń $X$ nazywamy *łukowo spójną*, gdy każde jej dwa punkty można połączyć krzywą: dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje krzywa $c : [0,1] \to X$ taka, że $c(0) = x$ i $c(y) = 1$. Każda przestrzeń łukowo spójna jest spójna. Czytelnik bez trudu skonstruuje przykład przestrzeni spójnej, która łukowo spójna nie jest. Podobnie jak w przypadku zwykłej spójności, przestrzeń $X$ nazywamy *lokalnie łukowo spójną*, gdy dowolne otoczenie dowolnego jej punktu zawiera łukowo spójne otoczenie tego punktu.

**Ćwiczenie 1.1.1** Wykaż, że każda przestrzeń spójna i lokalnie łukowo spójna jest łukowo spójna.

### 1.1.5 Przestrzenie metryczne

*Odległością* lub *metryką* w zbiorze $X$ nazywamy dowolną funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą dla dowolnych punktów $x, y$ i $z \in X$ następujące trzy warunki:

(i) $d(x,y) \geqslant 0$ i $d(x,y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (symetria),

(iii) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (nierówność trójkąta).

Parę złożoną z niepustego zbioru $X$ i metryki $d$ w $X$ nazywamy *przestrzenią metryczną*.

*Kulą otwartą* w przestrzeni metrycznej $X$ nazywamy zbiór postaci $B(x,r) = \{y \in X; d(x,y) < r$, gdzie $x \in X$ jest *środkiem* kuli, zaś $r > 0$ jej *promieniem*. Podobnie, *kulą domkniętą* o środku $x$ i promieniu $r$ nazywamy zbiór $\bar{B}(x,r) = \{y \in X; d(x,y) \leqslant r\}$. Wszystkie kule otwarte w przestrzeni metrycznej stanowią bazę pewnej topologii: zbiór $U \subset X$ jest otwarty w tej topologii wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego punkt jest środkiem pewnej kuli otwartej całkowicie zawartej w $U$. Kule domknięte są zbiorami domkniętymi w tej topologii. Wynika stąd od razu, że $\overline{B(x,r)} \subset \bar{B}(x,r)$ dla wszystkich $x$ i $r$. Czytelnik z łatwością znajdzie przykład przestrzeni metrycznej, w której domknięcie kuli otwartej nie zawsze pokrywa się z kulą domkniętą o tym samym środku i promieniu.

Przestrzeń topologiczna $X$ jest *metryzowalna*, gdy jej topologia pokrywa się z topologią pochodzącą od pewnej metryki w zbiorze $X$.

Ciąg $(x_n)$ punktów przestrzeni metrycznej $(X,d)$ nazywamy *zbieżnym* do granicy $x_0 \in X$, gdy ciąg odległości $(d(x_n,x_0))$ dąży do 0 przy $n$ dążącym do nieskończoności. Podzbiór $A$ przestrzeni metrycznej $X$ jest domknięty, gdy granica dowolnego zbieżnego ciągu punktów zbioru $A$ należy do $A$.

Ciąg $(x_n)$ nazywamy *ciągiem Cauchy'ego*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $d(x_n,x_m) < \varepsilon$, gdy tylko $m,n \geqslant n_0$. Oczywiście, każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego. Na ogół ciąg Cauchy'ego nie musi być zbieżny. Przestrzeń metryczną nazywamy *zupełną*, gdy każdy ciąg Cauchy'ego punktów tej przestrzeni jest zbieżny. Każda zwarta przestrzeń metryczna jest zupełna. Podprzestrzeń domknięta przestrzeni zupełnej jest też zupełna.

Przestrzeń metryczna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg punktów tej przestrzeni zawiera podciąg zbieżny. Podprzestrzeń $A$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (z metryką euklidesową $d$, $d(x,y) = (\sum_i |x_i - y_i|^2)^{1/2}$, gdy $x = (x_1,\ldots,x_n)$ i $y = (y_1,\ldots,y_n)$) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy $A$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym (tj., zawartym w pewnej kuli).

## 1.2 Rozmaitości różniczkowe

*Rozmaitością topologiczną* wymiaru $n$ nazywamy parazwartą przestrzeń Hausdorffa $M$ lokalnie homeomorficzną z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^n$. Jeśli więc $x \in M$, to $x$ posiada otoczenie otwarte $U$ homeomorficzne poprzez pewien homeomorfizm $\phi : U \to \phi(U)$ z podzbiorem otwartym $\phi(U)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Każdy homeomorfizm podzbioru otwartego rozmaitości $M$ z podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy *mapą* na $M$. Rodzinę $\mathcal{A}$ map na $M$ nazywamy *atlasem*, gdy dziedziny map z $\mathcal{A}$ pokrywają $M$, tzn. gdy

$$\cup\{D_\phi; \phi \in \mathcal{A}\} = \mathcal{M},$$

gdzie — jak i często w dalszym ciągu — $D_\phi$ jest dziedziną odwzorowania $\phi$. Wymiar rozmaitości topologicznej $M$ oznaczamy symbolem $\dim M$.

Mapy $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ i $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ na $M$ nazywamy $\mathrm{C}^k$-*zgodnymi*, gdy złożenie

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

jest dyfeomorfizmem klasy $\mathrm{C}^k$. Relacja $\mathrm{C}^k$-zgodności jest, oczywiście, zwrotna, symetryczna i przechodnia. Atlas $\mathcal{A}$ nazywamy *atlasem klasy* $\mathrm{C}^k$, gdy dowolne dwie mapy $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ są $\mathrm{C}^k$-zgodne. Dwa atlasy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ klasy $\mathrm{C}^k$ na $M$ są $\mathrm{C}^k$-zgodne, gdy każda mapa jednego z nich jest $C^k$-zgodna z dowolną mapą drugiego z nich. Jeśli tak jest, suma $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ jest atlasem klasy $C^k$. Wynika stąd łatwo, że każdy atlas klasy $C^k$ na $M$ jest zawarty w dokładnie jednym maksymalnym (względem relacji inkluzji) atlasie tej samej klasy. Fakt ten uzasadnia następujące określenie.

**Definicja 1.2.1** *Rozmaitością różniczkową klasy* $C^k$ nazywamy rozmaitość topologiczną $M$ wraz z maksymalnym atlasem klasy $C^k$. Atlas ten nazywamy *strukturą różniczkową* na $M$.

Ponieważ dowolny dyfeomorfizm klasy $C^1$ pomiędzy dwoma zbiorami otwartymi przestrzeni euklidesowej można dowolnie dokładnie aproksymować dyfeomorfizmami klasy $C^\infty$, więc z każdego atlasu klasy $C^1$ na rozmaitości $M$ można wybrać atlas klasy $C^\infty$. (Precyzyjny dowód tego faktu można znaleźć w literaturze, np. w [**Hir**].) Dlatego w dalszym ciągu będziemy rozważać (o ile nie powiemy inaczej) tylko *rozmaitości gładkie*, tj. rozmaitości różniczkowe klasy $C^\infty$. Zwróćmy uwagę na to, że istnieją rozmaitości topologiczne nie posiadające żadnej struktury rozmaitości różniczkowej. Pierwszy przykład takiej rozmaitosci topologicznej podał Kervaire [**Ker**] w 1960 roku.

Każdy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ wraz z atlasem złożonym ze wszystkich dyfeomorfizmów podzbiorów otwartych $V \subset U$ na podzbiory otwarte przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest rozmaitością różniczkową. Podobnie, dowolny podzbiór otwarty $U$ dowolnej rozmaitości różniczkowej $M$ wraz z atlasem maksymalnym zawierającym wszystkie mapy struktury różniczkowej na $M$ o dziedzinach zawartych w $U$ jest rozmaitością różniczkową zwaną *podrozmaitością otwartą* rozmaitości $M$, przy czym $\dim U = \dim M$. Ponieważ każda rozmaitość topologiczna jest lokalnie spójna (a nawet lokalnie łukowo spójna), więc składowe spójności rozmaitości są otwarte i są jej podrozmaitościami otwartymi. W większości rozważań będziemy zakładać spójność rozpatrywanych rozmaitości. Z ćwiczenia 1.1.1 wynika, że rozmaitości spójne są też łukowo spójne. W szczególności, naturalną strukturę gładkiej rozmaitości wymiaru $n^2$ posiada zbiór $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ nieosobliwych macierzy stopnia $n$ i jego składowa spójności $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ złożona z macierzy o wyznaczniku dodatnim: oba te zbiory można utożsamić z podzbiorami otwartymi przestrzeni $\mathbb{R}^{n^2}$ wypisując wszystkie wyrazy macierzy w postaci ciągu $n^2$ elementowego.

Innej naturalnej klasy przykładów dostarczają odwzorowania gładkie: jeśli $F : U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset R^m$) jest takim odwzorowaniem, to jego wykres $M_F = \{(x, F(x)); x \in U\}$ wraz z topologią podprzestrzeni indukowaną z $R^{n+m}$ i maksymalnym atlasem zawierającym naturalną projekcję $\mathrm{pr} : M_F \to U$, $\mathrm{pr}(x, F(x)) = x$, jest rozmaitością gładką wymiaru $m$.

**Przykład 1.2.2** *Sfera* $n$-wymiarowa

$$S^n(r) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\}$$

($r > 0$) wraz z topologią podprzestrzeni indukowaną z $\mathbb{R}^{n+1}$ i atlasem maksymalnym zawierającym (dwa) *rzuty stereograficzne* $\phi^{\pm} : S^n(r) \setminus \{(0, \ldots, 0, \pm 1)\} \to \mathbb{R}^n$ (z biegunów, północnego i południowego) określone wzorami

$$\phi^{\pm}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 - \pm x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - \pm x_{n+1}} \right)$$

jest zwartą rozmaitością gładką. (Czytelnik sprawdzi bez trudu, że mapy $\phi^+$ i $\phi^-$ są $C^\infty$-zgodne !) Ponieważ sfera nie jest homeomorficzna z żadnym podzbiorem otwartym przestrzeni euklidesowej, więc każdy atlas na sferze składa się z conajmniej dwu map. W tym sensie, rzuty stereograficzne $\phi^{\pm}$ opisują atlas minimalny na sferze.

**Przykład 1.2.3** Produkt $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ $n$ okręgów jednostkowych jest $n$-wymiarową rozmaitością zwartą zwaną *torusem* ($n$-wymiarowym). Mapami na $T^n$ są przekształcenia postaci $(F|U)^{-1}$, gdzie

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left(e^{2\pi i \alpha_1}, \ldots, e^{2\pi i \alpha_n}\right)$$

dla dowolnych $\alpha_j \in \mathbb{R}$, zaś $U \subset \mathbb{R}^n$ jest takim zbiorem otwartym, dla którego $F|U$ jest odwracalne. Inny opis torusa znajdziemy w pagargrafie 1.3.3.

Czytelnik bez trudu wykaże, że takie powierzchnie jak elipsoida, hiperboloidy (jedno- i dwupowłokowa), paraboloidy (eliptyczna i hiperboliczna), powierzchnie walcowe (eliptyczna, paraboliczna i hiperboliczna) i inne są rozmaitościami dwuwymiarowymi. Zwracamy uwagę na to, że powierzchnia stożkowa określona w $\mathbb{R}^3$ równaniem

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

nie jest rozmaitością topologiczną: Punkt $o = (0, 0, 0)$ nie posiada otoczenia homeomorficznego z $\mathbb{R}^2$. Usuwając z tej powierzchni punkt $o$ przekształcamy ją w niespójną, dwuwymiarową rozmaitość gładką.

Inne przykłady rozmaitości pojawią się w dalszym ciągu, przy różnych okazjach.

Ważnym uogólnieniem pojęcia rozmaitości jest tzw. rozmaitość z brzegiem. Aby wprowadzić takie rozmaitości zdefiniujmy *półprzestrzeń* $\mathbb{R}^n_+$ jako zbiór wszystkich punktów $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, dla których $u_n \geqslant 0$, wyposażmy ją w topologię podprzestrzeni (podzbiór półprzestrzeni $\mathbb{R}^n_+$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n_+$, gdy jest częścią wspólną $\mathbb{R}^n_+$ i zbioru otwartego w $\mathbb{R}^n$) i przyjmijmy, że odwzorowanie $F : U \to \mathbb{R}^n$, gdzie $U$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n_+$, jest różniczkowalne klasy $C^k$, gdy każdy punkt $u \in U$ posiada takie otoczenie $V$ otwarte w $\mathbb{R}^n$, że $F$ przedłuża się do odwzorowania klasy $C^k$ na $V$ (o wartościach w $\mathbb{R}^n$).

Parazwartą przestrzeń Hausdorffa $M$ nazywamy $n$-wymiarową *rozmaitością topologiczną z brzegiem*, gdy jest lokalnie homeomorficzna z $\mathbb{R}^n_+$. Podobnie jak poprzednio, rozmaitość taką wyposażoną w atlas maksymalny map $C^k$-zgodnych nazywamy *rozmaitością klasy* $\mathrm{C}^k$ *z brzegiem*, a gdy $k = \infty$ mówimy o *rozmaitości gładkiej z brzegiem* lub krótko o *rozmaitości z brzegiem.*

Jeżeli $M$ jest rozmaitością topologiczną z brzegiem, $x \in M$, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ jest mapą na $M$ określoną w otoczeniu $x$ i $\phi_n(x) = 0$, to $x$ nazywamy *punktem brzegowym* rozmaitości $M$. Oczywiście, określenie to jest poprawne: jeżeli $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ jest inną mapą określoną w otoczeniu punktu brzegowego $x$, to $\psi_n(x) = 0$. Zbiór $\partial M$ wszystkich punktów brzegowych rozmaitości $M$ nazywamy *brzegiem* $M$. Zbiór $M_0 = M \setminus \partial M$ jest "zwykłą" rozmaitością $n$-wymiarową (bez brzegu), a brzeg $\partial M$ jest rozmaitością $(n-1)$-wymiarową (też bez brzegu). Istotnie, wszystkie przekształcenia postaci

$$\phi|\phi^{-1}(\{(u_1, \dots, u_n); u_n > 0\})$$

(odp., postaci

$$(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})|\phi^{-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})),$$

gdzie $\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n)$ jest mapą na $M$, tworzą atlas na $M_0$ (odp., na $\partial M$). Oczywiście, każda "zwykła" rozmaitość $M$ jest rozmaitością z brzegiem $\partial M = \emptyset$.

Przedział domknięty $I = [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ jest jednowymiarową rozmaitością z brzegiem $\partial I = \{a, b\}$. Każdy obszar płaski ograniczony regularną krzywą Jordana $\Gamma$ jest dwuwymiarową rozmaitością z brzegiem $\Gamma$. Kula domknięta

$$B = \{(x_0, x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_i x_i^2 \leqslant r^2\}$$

$(r > 0)$ jest $(n+1)$-wymiarową rozmaitością z brzegiem $S^n(r)$. Prostokąt

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

$(a < b,\ c < d)$ jest rozmaitością topologiczną z brzegiem, ale nie jest gładką rozmaitością z brzegiem. Czasem mówi się, że jest on (podobnie jak i dowolny $n$-wymiarowy przedział domknięty w $\mathbb{R}^n$) "*rozmaitością z narożami*". Czytelnik bez trudu sformułuje stosowną definicję i sprawdzi czy (ew., kiedy) brzeg dowolnej rozmaitości z narożami jest też rozmaitością z narożami.

# 1.3 Konstrukcje

## 1.3.1 Podrozmaitości

Jak już wspominaliśmy każdy podzbiór otwarty $U$ rozmaitości $M$ posiada naturalną strukturę rozmaitości: atlas na $U$ składa się ze wszystkich odwzorowań postaci $\phi|D_\phi \cap U$, gdzie $\phi : D_\phi \to \mathbb{R}^n$ jest mapą na $M$. Taki zbiór $U$ z opisanym tu atlasem jest *podrozmaitością otwartą* rozmaitości $M$.

Ogólniej, przypuśćmy, że $N$ jest takim podzbiorem rozmaitości $M$, że dla każdego punktu $x \in N$ można znaleźć mapę $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ na $M$, dla której $x \in D_\phi$ i zawierająca punkt $x$ składowa spójności $N_{\phi,x}$ zbioru $N \cap D_\phi$ jest dana równaniami $\phi_{k+1} = \text{const.}, \ldots, \phi_n = \text{const.}$, gdzie $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ jest niezależne od $x$. Wtedy, odwzorowanie $\tilde{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_k)|N_{\phi,x}$ jest homeomorfizmem zbioru $N_{\psi,x}$ na podzbiór otwarty przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Jeżeli dwie takie mapy $\phi$ i $\psi$ są $\mathrm{C}^r$-zgodne, to odwzorowania $\tilde{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_k)|N_{\phi,x}$ i $\tilde{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_k)|N_{\psi,x}$ są również $\mathrm{C}^r$-zgodne. Jeśli więc zbiór $N$ można pokryć mapami $\phi$ z atlasu klasy $\mathrm{C}^r$ na $M$ spełniającymi powyższy warunek, to odpowiadająca im rodzina odwzorowań $\tilde{\phi}$ stanowi atlas klasy $\mathrm{C}^r$ na zbiorze $N$ z topologią, w której otwarte są takie składowe $N_{\phi,x}$ i — ogólniej — wszystkie przeciwobrazy $\tilde{\phi}^{-1}(V)$ podzbiorów otwartych $V \subset \mathbb{R}^k$. Zbiór $N$ z takim atlasem jest rozmaitością wymiaru $k$. Mówimy, że $N$ jest $k$-wymiarową *podrozmaitością* klasy $\mathrm{C}^r$.

Odnotujmy, że *a priori* topologia podrozmaitości $N$ jest silniejsza od topologii indukowanej na $N$ z $M$.

### 1.3.2 Produkt

Jeśli $M_1$ i $M_2$ są rozmaitościami różniczkowymi klasy $\mathrm{C}^r$ i $\phi_i$, $i = 1, 2$, jest mapą na $M_i$, to odwzorowanie $\phi$ dane wzorem

$$\phi(x_1, x_2) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_2))$$

jest mapą na przestrzeni $M_1 \times M_2$ (z topologią produktu), przy czym wszystkie mapy otrzymane w ten sposób tworzą atlas klasy $\mathrm{C}^r$. Produkt $M_1 \times M_2$ z maksymalnym atlasem zawierającym wszystkie mapy $\phi$ powyższej postaci nazywamy *produktem rozmaitości* $M_1$, $M_2$. Oczywiście

$$\dim(M_1 \times M_2) = \dim M_1 + \dim M_2.$$

### 1.3.3 Dzielenie

Przypuśćmy teraz, że $R \subset M \times M$ jest relacją równoważności na rozmaitości $M$ i wyposażmy zbiór $M/R$ klas abstarkcji relacji $R$ w toplogię ilorazową. To oznacza, że jeśli $\pi : M \to M/R$ jest naturalnym rzutowaniem przypisującym dowolnemu punktowi $x \in M$ klasę abstrakcji $[x]_R$, to zbiór $U \subset M/R$ jest otwarty w $M/R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi^{-1}(U)$ jest podzbiorem otwartym rozmaitości $M$. Udowodnione w roku **** przez Godementa poniższe twierdzenie podaje warunki wystarczające na to, by przestrzeń $M/R$ posiadała naturalną strukturę rozmaitości. Dowód tego twierdzenia na razie **** pomijamy. Występujące w nim rzutowanie pr jest ograniczeniem do $R$ jednego (dowolnie wybranego) z rzutowań $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x$ lub $(x, y) \mapsto y$.

**Twierdzenie 1.3.1** *Jeżeli $R$ jest podrozmaitością produktu $M \times M$ i rzutowanie* $\mathrm{pr} : R \to M$ *jest submersją, to przestrzeń ilorazowa $M/R$ posiada strukturę rozmaitości, przy której rzutowanie $\pi : M \to M/R$ jest submersją.* □

Pojawiające się tu pojęcie submersji wprowadzimy w rozdziale 2. Krótko mówiąc, odwzorowanie $F$ między rozmaitościami $M$ i $N$ jest submersją, gdy $m = \dim M \geqslant n = \dim N$, a macierz Jakobiego złożenia $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ ma rząd równy $n$ dla dowolnych map $\phi$ na $M$ i $\psi$ na $N$.

Omówimy tu jeden przykład. Inne przykłady rozmaitości ilorazowych pojawią się później.

**Przykład 1.3.2** Wprowadźmy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ relację równoważności $\equiv$ przyjmując, że $x \equiv y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Łatwo sprawdzić, że relacja ta spełnia warunki twierdzenia 1.3.1. Zatem $\mathbb{R}^n/\equiv$ ma naturalną strukturę rozmaitości. Ponieważ iloraz $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ można traktować jako okrąg, a relacja $\equiv$ w $\mathbb{R}^n$ działa "po współrzędnych", więc rozmaitość $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ można utożsamić z produktem $n$ okręgów $S^1 \times \cdots \times S^1$, tj. z torusem $T^n$. Jeśli teraz $P \subset \mathbb{R}^n$ jest $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyzną daną równaniem $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n + c = 0$, to $\pi(P)$ jest podrozmaitością torusa $T^n$. Jeśli liczby $a_1, \ldots, a_n$ są zależne nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (tj. jeśli wszystkie ilorazy $a_i/a_j$ należą do $\mathbb{Q}$), to $\pi(P)$ jest rozmaitością zwartą i topologia podrozmaitości pokrywa się z toplogią indukowaną. W przeciwnym razie, $\pi(P)$ jest zbiorem gęstym w $T^n$, a topologia podrozmaitości jest istotnie silniejsza of indukowanej. Do przykładu tego wrócimy jeszcze raz, w paragrafie 2.5.

### 1.3.4 Sklejanie

Weźmy teraz dwie $n$-wymiarowe rozmaitości $M_1$ i $M_2$ z brzegiem oraz wybierzmy w $\partial M_i$, $i = 1, 2$, podzbiory $N_i$ będące sumami składowych spójności brzegów $\partial M_i$. $N_1$ i $N_2$ są rozmaitościami bez brzegu. Przypuśćmy, że są one dyfeomorficzne i wybierzmy dyfeomorfizm (por. paragraf 2.2) $F : N_1 \to N_2$. Określmy relację równoważności $\equiv_F$ w $M_1 \cup M_2$ w następujący sposób: $x \equiv_F y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ lub $x \in N_1,\ y \in N_2$ i $y = F(x)$, lub $y \in N_1,\ x \in N_2$ i $x = F(y)$. Relacja ta spełnia warunki twierdzenia 1.3.1. (Zwróćmy tu uwagę na drobną trudność: $M_1 \cup M_2$ jest rozmaitością z brzegiem.) Przestrzeń ilorazowa

$$M_1 \cup_F M_2 = (M_1 \cup M_2)/\equiv_F$$

jest rozmaitością (*a priori*, z brzegiem). Mówimy, że została ona otrzymana przez *sklejenie* $M_1$ i $M_2$, wzdłuż $N_1$ i $N_2$, przy pomocy $F$.

W szczególności, jeżeli $M_1$ i $M_2$ są dowolnymi rozmaitościami $n$-wymiarowymi, $D_i \subset M_i$, $i = 1, 2$, są kulami domkniętymi (tj., podzbiorami dziedzin map przekształcanych przez nie na "prawdziwe" kule domknięte w $\mathbb{R}^n$), $C_i = \partial D_i$ i $F$ jest dyfeomorfizmem $C_1$ na $C_2$, to rozmaitość $M_1 \cup_F M_2$ (zwróćmy tu uwagę na drobną, nieszkodliwą niekonsekwencję oznaczeniową) otrzymaną przez sklejenie $M_1 \setminus \operatorname{int} D_1$ i $M_2 \setminus \operatorname{int} D_2$ wzdłuż $C_1$ i $C_2$ nazywamy *sumą spójną* rozmaitości $M_1$ i $M_2$.

**Przykład 1.3.3** Każdą zwartą i orientowalną (por. paragraf 2.9.2) powierzchnię (tj. rozmaitość dwuwymiarową bez brzegu) $S$ otrzymuje się ze sfery $S^2$ poprzez przyklejenie do niej pewnej, skończonej liczby tzw. *rączek* tj. powierzchni bocznych walca $S^1 \times [0,1]$. Każda taka rączka $R$ ma brzeg o dwu składowych $C_1$ i $C_2$, które przyklejamy (przy pomocy pewnych dyfeomorfizmów) do brzegów $C_1'$ i $C_2'$ dwu rozłącznych dysków $D_1$ i $D_2 \subset S^2$ (których wnętrza usuwamy). Liczbę rączek nazywamy *rodzajem* (łac., *genus*) powierzchni $S$. Tak więc, sfera $S^2$ jest powierzchnią rodzaju 0, a powierzchnia rodzaju 1 jest dyfeomorfizcna z torusem $T^2$. Powierzchnia rodzaju $g > 1$ jest sumą spójną $g$ torusów (rysunek *****).

**Przykład 1.3.4** Sfera trójwymiarowa powstaje przez sklejenie dwu egzemplarzy produktu $D^2 \times S^1$, gdzie $D^2$ jest zwykłym kołem na płaszczyźnie, z analogicznym produktem $S^1 \times D^2$. Jeżeli brzeg koła $D^2$ oznaczymy przez $C$ (oczywiście, $C$ jest okręgiem), to do sklejania należy użyć dyfeomorfizmu $F : C \times S^1 \to S^1 \times C$ danego wzorem $F(z,w) = (w,z)$. Istotnie, sferę $S^3 = \{x = (x_1,x_2,x_3,x_4); \sum_i x_i^2 = 1\}$ można przedstawić w postaci sumy $S^3 = A \cup B$, gdzie $A = \{x \in S^3; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1/2\}$ zaś $B = \{x \in S^3; x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1/2\}$; oczywiście zbiory $A$ i $B$ "wyglądają" jak produkty koła i okręgu.

Ponieważ $S^3$ jest jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc opisany powyżej rozkład można przedstawić graficznie tak jak na rysunku ****, gdzie przez każdy punkt koła $D$ przechodzi okrąg, z tym, że ten przechodzący przez środek "ucieka" do nieskończoności, punktu, który trzeba dodać do $\mathbb{R}^3$ by otrzymać sferę. Zatem, dopełnienie w $S^3$ pełnego torusa $A$ z tego rysunku jest identyczne z produktem $D \times S^1$.

Zauważmy jeszczce, że sklejając dwa produkty $D^2 \times S^1$ przy pomocy odwzorowania tożsamościowego $\mathrm{id}_{C \times S^1}$ otrzymamy produkt $S^2 \times S^1$, rozmaitość istotnie inną niż $S^3$. Wiadomo, że bardzo szeroką klasę rozmaitości trójwymiarowych można otrzymać ze sfery $S^3$ poprzez usuwanie z niej "pełnych torusów" postaci $D^2 \times S^1$ i wklejanie ich z powrotem przy pomocy innych odwzorowań sklejających.

# Rozdział 2

# Akcesoria

## 2.1 Odwzorowania i funkcje różniczkowalne w przestrzeniach euklidesowych

### 2.1.1 Różniczka i pochodne kierunkowe

Odwzorowanie $F = (F_1, \dots, F_n)$ zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^m$ w przestrzeń $R^n$ nazywamy *różniczkowalnym klasy* $\mathrm{C}^k$ $(k = 1, 2, \dots)$, gdy wszystkie jego współrzędne $F_j$ posiadają ciągłe pochodne cząstkowe wszystkich rzędów $\leqslant k$. O odwzorowaniach różniczkowalnych klasy $\mathrm{C}^\infty$ będzimy mówili krótko, że są *gładkie*. *Różniczką* odwzorowania $F$ klasy $\mathrm{C}^1$ w punkcie $x \in U$ nazywamy przekształcenie liniowe $dF(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, którego macierzą w bazach kanonicznych $(e_i)$, $e_i = (\delta_{ij})$, przestrzeni $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ jest jego *macierz Jakobiego*, której wyrazami są pochodne cząstkowe współrzędnych tego odwzorowania:

$$dF(x) = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x); i \leqslant n, j \leqslant m \right].$$

W szczególnym przypadku $n = 1$ mówimy o funkcjach różniczkowalnych i gładkich. Wszystkie funkcje różniczkowalne klasy $\mathrm{C}^k$ na $U$ tworzą (wraz z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia) pierścień $\mathrm{C}^k(U)$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Dla dowolnego $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ i dowolnego $x \in U$ odwzorowanie $\partial_a(x)$ przyporządkowujące dowolnej funkcji $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$ jej *pochodną kierunkową*

$$\partial_a f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

w punkcie $x$ jestodwzorowaniem $\mathbb{R}$-liniowym i spełnia *warunek Leibniza*

$$\partial_a(fg)(x) = \partial_a f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial_a g(x)$$

dla dowolnych $f$ i $g$. Każde odwzorowanie liniowe $\mathrm{C}^\infty(U) \to \mathbb{R}$ spełniające taki warunek Leibniza jest postaci $\partial_a(x)$ dla pewnego, dokładnie jednego $a \in \mathbb{R}$. Przestrzeń $\mathbb{R}^m$ można więc utożamić zarówno z przestrzenią wektorów zaczepionych w punkcie $x \in U$ jak i z przestrzenią odwzorowań liniowych $\mathrm{C}^\infty(U) \to \mathbb{R}$ spełniających warunek Leibniza.

**Ćwiczenie 2.1.1** Wykaż, że jeżeli pewne odwzorowanie liniowe $\mathrm{C}^\infty(U) \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Leibniza dla dwu różnych punktów $x, y \in U$, to jest ono tożsamościowo równe zeru.

### 2.1.2 Regularność

Jeżeli odwzorowanie $F : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$, jest różniczkowalne klasy $\mathrm{C}^k$, $k \geqslant 1$, to mówimy, że $F$ jest *regularne* w punkcie $x \in U$, gdy rząd $\operatorname{rank} dF(x)$ jego różniczki w punkcie $x$ przyjmuje maksymalną dopuszczalną wartość, a więc gdy

$$\operatorname{rank} dF(x) = \min\{m, n\}.$$

Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ nazywamy *wartością regularną* $F$, gdy $F$ jest regularne w każdym punkcie przeciwobrazu $F^{-1}(\{y\})$. Zauważmy, że wszystkie punkty zbioru $\mathbb{R}^n \setminus F(U)$ są wartościami regularnymi odwzorowania $F$. Punkty $x \in U$, w których $F$ nie jest regularne nazywa się jego *punktami krytycznymi*, punkty $y \in F(U)$, które nie są wartościami regularnymi nazywa się *wartościami krytycznymi*. Klasyczne *twierdzenie Sarda* głosi, że zbiór wartości krytycznych dowolnego odwzorowania gładkiego ma zerową miarę Lebesgue'a. Odwzorowanie $F$ nazywamy *regularnym*, gdy zbiór jego punktów krytycznych jest pusty. Jeżeli $m \leqslant n$ (odp., $m \geqslant n$), to odwzorowanie regularne $F : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset R^m$ nazywa się *imersją* (odp., *submersją*). Różniczka $dF(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ imersji (odp., submersji) $F$ jest — dla dowolnego $x$ z dziedziny $F$ — monomorfizmem (odp., epimorfizmem).

Odwzorowanie $F : U \to V$, gdzie $U, V \subset \mathbb{R}^m$ są podzbiorami otwartymi, nazywa się *dyfeomorfizmem klasy* $\mathrm{C}^k$, gdy jest ono różnowartościowe, $F(U) = V$ oraz oba odwzorowania $F$ i $F^{-1}$ są różniczkowalne klasy $\mathrm{C}^k$. Dobrze znane *twierdzenie o dyfeomorfizmie* głosi, że jeżeli $x \in U$ jest punktem regularnym odwzorowania różniczkowalnego $F : U \to \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^m$), to istnieje otoczenie $W \subset U$ punktu $x$ takie,że $f|W$ jest dyfeomorfizmem $W$ na $f(W)$. Podobnie, jeśli $m < n$ (odp., $m > n$) i $F : U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^m$) jest regularne w punkcie $x \in U$, to istnieje otoczenie $W$ punktu $F(x)$ (odp., otoczenie $V$ punktu $x$) oraz dyfeomorfizm $\Phi : W \to \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n$ (odp., $\Psi : V \to \Psi(V) \subset \mathbb{R}^m$) taki, że $\Phi \circ F(y) = (y, 0)$ dla wszystkich $y \in W$ (odp., $F \circ \Psi = \mathrm{pr}$, gdzie $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oznacza naturalne rzutowanie. Powyższe stwierdzenie daje lokalną charakteryzację imersji i submersji: imersje są lokalnie "podobne" (z dokładnością do dyfeomorfizmu) do naturalnego włożenia

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \{0\} \to \mathbb{R}^n$ podczas, gdy submersje są lokalnie podobne do naturalnej projekcji $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Z powyższej dyskusji wynika, że każdy punkt dziedziny pewnej imersji posiada otoczenie, na którym jest ona różnowartościowa oraz, że submesrsje są przekształceniami otwartymi (tj., przekształcają zbiory otwarte na otwarte).

**Ćwiczenie 2.1.2** Podaj przykład imersji, która nie jest różnowartościowa w całej swej dziedzinie.

## 2.2 Funkcje i odzworowania gładkie na rozmaitościach

Niech $M$ i $N$ bdą dwoma rozmaitościami różniczkowymi klasy $\mathrm{C}^k$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, $m = \dim M$, $n = \dim N$. Odwzorowanie ciągłe $F : M \to N$ nazywamy *różniczkowalnym* lub *gładkim*, jeżeli dla dowolnych dwu map $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ na $M$ i $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ na $N$ złożenie

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

jest różniczkowalne klasy $\mathrm{C}^k$. Podobnie, jeśli $l \leqslant k$ i wszystkie takie złożenia są różniczkowalne klasy $\mathrm{C}^l$, to mówimy, że $F$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym klasy $\mathrm{C}^l$.

Oczywiście, odwzorowanie tożsamościowe $\mathrm{id}_M$ jest gładkim przekształceniem rozmaitości $M$ w siebie, a i złożenia odwzorowań gładkich (tej samej klasy) są zawsze gładkie.

Odwzorowanie gładkie $F : M \to N$ nazywamy *dyfeomorfizmem*, gdy jest różnowartościowe, $F(M) = N$ i $F^{-1} : N \to M$ jest też odzworowaniem gładkim; $F$ nazywamy *lokalnym dyfeomorfizmem*, gdy $F(M) = N$ i każdy punkt $x \in M$ posiada otoczenie przekształcane przez $F$ dyfeomorficznie na otoczenie punktu $F(x)$. Oczywiście, dyfeomorfizmy (odp., lokalne dyfeomeorfizmy) rozmaitości są homeomorfizmami (odp., lokalnymi homeomorfizmami) ich przestrzeni topologicznych. Ponadto, złożenia dyfeomorfizmów (odp. lokalnych dyfeomorfizmów) są dyfeomorfizmami (odp., lokalnymi dyfeomorfizmami), przekształcenia tożsamościowe rozmaitości na siebie oraz przekształcenia odwrotne do dyfeomorfizmów są dyfeomorfizmami, a zatem wszystkie dyfeomorfizmy danej rozmaitości $M$ stanowią grupę przekształceń. Rozmaitości (lokalnie) dyfeomorficzne mają ten sam wymiar.

Odwzorowania gładkie rozmaitości $M$ w $\mathbb{R}$ nazywamy *funkcjami gładkimi*. Funkcje stałe, sumy i iloczyny funkcji gładkich są gładkie. Zatem, wszystkie funkcje gładkie na rozmaitości $M$ klasy $\mathrm{C}^k$ tworzą (wraz z naturalnym dodawaniem i mnożeniem) pierścień $\mathrm{C}^k(M)$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

Wykażemy teraz, że rodzina funkcji gładkich na danej rozmaitości gładkiej $M$ jest bardzo obszerna, w szczególności, że oddziela ona punkty, tzn. że dla dowolnych dwu punktów rozmaitości $M$ istnieje funkcja gładka na $M$ przyjmująca w tych punktach różne wartości. Rozważania zaczniemy od konstrukcji pewnych funkcji gładkich na $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{R}^n$.

**Ćwiczenie 2.2.1** Wykaż, że poniżej określone funkcje są gładkie (klasy $C^\infty$) na $\mathbb{R}$:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-1/t}$, gdy $t > 0$ i $f(t) = 0$, gdy $t \leqslant 0$,

(ii) $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $a < b$ i

$$f_{a,b}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} f(s-a)f(b-s)ds}{\int_{-\infty}^{b} f(s-a)f(b-s)ds}$$

,

(iii) $f_{a,a',b',b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $a < a' < b' < b$ i $f_{a,a',b',b}(t) = f_{a,a'}(t) \cdot (1 - f_{b',b}(t))$.

Łatwo zauważyć, że funkcja $f_{a,a',b',b}$ jest tożsamościowo równa 1 na przedziale domkniętym $[a', b']$, zaś znika tożsamościowo poza przedziałem otwartym $(a, b)$. Dokładniej, $\operatorname{supp} f_{a,a',b',b} = [a, b]$. Przy pomocy tej funkcji i podstawienia typu $t = |x - x_0|^2$ można skonstruować dla dowolnych koncentrycznych kul otwartych $B$ i $B'$ takich, że $\bar{B}' \subset B \subset \mathbb{R}^n$ nieujemną funkcję gładką $f_{B',B}$ równą 1 na $B'$, dodatnią wszędzie w $B$ i równą zeru poza $B$.

**Twierdzenie 2.2.2** *Dla dowolnego podzbioru zwartego $K$ rozmaitości $M$ i dowolnego jego otoczenia otwartego $U$ istnieje nieujemna funkcja gładka $f_{K,U}$ taka, że $f|K \equiv 1$ i $f|M \setminus U \equiv 0$.*

*Dowód.* Dla każdego $x \in K$ wybierzmy mapę $\phi_x$ określoną w jego otoczeniu i dwa otoczenie otwarte $V_x$ i $V'_x$ punktu $x$ takie, że $\overline{V'_x} \subset V_x \subset \overline{V_x} \subset U$ oraz, że zbiory $B_x = \phi_x(V_x)$ i $B'_x = \phi_x(V'_x)$ są koncentrycznymi kulami w $\mathbb{R}^n$, $n = \dim M$. Określmy funkcję $f_x : M \to \mathbb{R}$ w następujący sposób: $f_x = f_{B',B} \circ \phi_x$ na dziedzinie mapy $\phi_x$ i $f_x \equiv 0$ poza nią. Oczywiście, $f_x$ jest funkcją gładką na $M$. Wybierzmy pokrycie skończone $V'_{x_1}, \ldots, V'_{x_k}$ zbioru $K$ i przyjmijmy

$$f_{K,U} = 1 - (1 - f_{x_1}) \cdot \cdots \cdot (1 - f_{x_k}).$$

Łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja $f_{K,U}$ spełnia warunki twierdzenia. □

**Wniosek 2.2.3** *Dla dowolnych dwu rozłącznych podzbiorów domkniętych $A$ i $B$ rozmaitości $M$, z których jeden jest zwarty istnieje funkcja gładka $f : M \to [0, 1]$ taka, że $f|A \equiv 1$ i $f|B \equiv 0$. W szczególności, dla dowolnych dwu punktów $x, y \in M$ istnieje funkcja gładka $f : M \to [0, 1]$, dla której $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$.* □

Ponieważ rozmaitości są tu z założenia przestrzeniami parazwartymi, więc istnieją na nich ciągłe rozkłady jedności podporządkowane dowolnym pokryciom otwartym. Wykażemy teraz, że na rozmaitościach istnieją też gładkie rozkłady jedności. Fakt ten, jak zobaczymy później, jest bardzo ważny: pozwala udowodnić istnienie na rozmaitościach różnych struktur badanych w geometrii różniczkowej.

**Twierdzenie 2.2.4** *Dla dowolnego pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ dowolnej rozmaitości $M$ istnieje gładki rozkład jedności podoporządkowany $\mathcal{U}$.*

*Dowód.* Ponieważ rozmaitość $M$ jest przestrzenią parazwartą i lokalnie zwartą, więc istnieje pokrycie otwarte $\mathcal{V}$ wpisane w $\mathcal{U}$ i takie, że $\bar{V}$ jest zbiorem zwartym dla każdego $V \in \mathcal{V}$. Ponieważ przestrzenie parazwarte są normalne, więc istnieje też lokalnie skończone pokrycie otwarte $\mathcal{W}$ takie, że domknięcie dowolnego zbioru $W \in \mathcal{W}$ zawiera się w pewnym zbiorze $V \in \mathcal{V}$. Dla każdego $W \in \mathcal{W}$ wybierzmy jeden taki zbiór $V_W \in \mathcal{V}$ i funkcję $f_{\bar{W},V_W}$ spełniającą warunki twierdzenia 2.2.2. Suma

$$f = \sum_{W \in \mathcal{W}} f_{\bar{W},V_W}$$

jest dobrze określona, gładka i dodatnia na całym $M$. Funkcje $h_W$, $W \in \mathcal{W}$, określone wzorem

$$h_W = \frac{1}{f} f_{\bar{W},V_W}$$

tworzą gładki rozkład jedności podporządkowany pokryciu $\mathcal{U}$. □

## 2.3 Wektory styczne

Jeżeli $M$ jest rozmaitością gładką i $x \in M$, to *wektorem stycznym* do $M$ w punkcie $x$ nazywamy każde przekształcenie $\mathbb{R}$-liniowe $v : \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ spełniające warunek Leibniza

$$v(fg) = vf \cdot g(x) + f(x) \cdot vg \tag{2.3.1}$$

dla dowolnych $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$. Z warunku (2.3.1) wynika od razu, że $vf = 0$, gdy $f$ jest funkcją stałą. Co więcej, $vf = 0$, gdy funkcja $f$ jest stała w pewnym otoczeniu punktu $x$. Istotnie jeśli $f \equiv 0$ w otoczeniu $U$ punktu $x$, a $h$ jest taką funkcją gładką, że $h(x) = 1$ i $h \equiv 0$ na $M \setminus U$, to $hf \equiv 0$ na $M$ i

$$0 = v(hf) = 1 \cdot vf + 0 \cdot vh = vf,$$

a jeśli $f \equiv a$ na $U$, to $(f - a)|U \equiv 0$ i $vf = v(f - a) + va = 0 + 0 = 0$. Wynika stąd, że jeżeli dwie funkcje gładkie $f$ i $g$ pokrywają się w otoczeniu punktu $x$, to $vf = vg$. Z twierdzenia 2.2.2 wynika, że każdą funkcję gładką na otoczeniu punktu

$x$ można przedłużyć do funkcji gładkiej na całej rozmaitości. Zatem, przyjmując, że $vf = vh$, gdy $f$ jest gładka na pewnym otoczeniu punktu $x$ zaś $h$ jest jej gładkim przedłużeniem na $M$, możemy określić działanie wektora stycznego do $M$ w $x$ na wszystkie funkcje określone i gładkie w dowolnie małym otoczeniu punktu $x$. Wartość $vf$ można traktować jako *pochodną kierunkową* funkcji $f$ w kierunku wektora $v$.

Wszystkie wektory styczne do $M$ w punkcie $x$ wraz z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia przez skalary tworzą — co łatwo sprawdzić — przestrzeń wektorową. Nazywa się ją *przestrzenią styczną* do $M$ w punkcie $x$ i oznacza symbolem $T_xM$. Jeżeli $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ jest mapą w otoczeniu punktu $x$, to przekształcenia liniowe $(\partial/\partial\phi_i)(x)$, $i = 1, \dots n$, określone wzorami

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}(x)f = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(x)), f \in \mathrm{C}^\infty(M),$$

są wektorami stycznymi do $M$ w punkcie $x$. Ponieważ $(\partial/\partial\phi_i)(x)\phi_j = \delta_{ij}$, więc wektory te są liniowo niezależne. Ponadto, ze wzoru Taylora dla funkcji wielu zmiennych wynika, że jeżeli $f \in\mathrm{C}^\infty(M)$, to istnieje funkcja $g \in\mathrm{C}^\infty(M)$ taka, że $g(x) = 0$ i

$$f = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(x)) \cdot \phi_i + g^2$$

w pewnym otoczeniu punktu $x$. Stąd i z warunku Leibniza wynika, że dla dowolnej funkcji gładkiej $f$ i dowolnego wektora $v \in T_xM$ zachodzi równość

$$vf = \sum_{i=1}^{n} v\phi_i \cdot \frac{\partial}{\partial\phi_i}(x)f.$$

Zatem dowolny wektor $v \in T_xM$ można przedstawić w postaci

$$v = \sum_{i=1}^{n} v\phi_i \cdot \frac{\partial}{\partial\phi_i}(x).$$

Oznacza to, że wektory $(\partial/\partial\phi_i)(x)$, $i = 1, \dots, n$, tworzą bazę przestrzeni $T_xM$.

Jeżeli $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ jest inną mapą określoną w otoczeniu punktu $x$, to

$$\frac{\partial}{\partial\psi_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\phi_j}{\partial\psi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi_j}(x).$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że dla dowolnej rozmaitości gładkiej $M$ i dowolnego punktu $x \in M$ zachodzi równość

$$\dim T_xM = \dim M. \tag{2.3.2}$$

Jeżeli $M = V$ jest po prostu $n$-wymiarową przestrzenią liniową i $x, u \in V$, to przyporządkowanie

$$f \mapsto (t \mapsto f(x + tv))'(0)$$

określa wektor $\iota(u)$ przestrzeni $T_xV$. Okazuje się, że przekształcenie $\iota : V \to T_xV$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych. Podobnie, jeśli $M = M_1 \times M_2$ i $x = (x_1, x_2) \in M$ to odwzorowanie

$$T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2 \ni (v_1, v_2) \mapsto v \in T_xM,$$

gdzie

$$v(f) = v_1(f(\cdot, x_2)) + v_2(f(x_1, \cdot))$$

dla dowolnej funkcji gładkiej $f$ na $M$, jest izomorfizmem przestrzeni $T_xM$ i sumy prostej $T_{x_1}M_1 \oplus T_{x_2}M_2$; w dalszym ciągu będziemy często utożsamiali przestrzeń styczną do produktu dwu rozmaitości z sumą prostą przestrzeni stycznych do czynników produktu.

Sumę rozłaczną $TM$ wszystkich przestrzeni stycznych $T_xM$, $x \in M$, można wyposażyć w strukturę rozmaitości. Jeśli $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : U \to \mathbb{R}^n$ jest mapą na $M$, to określamy odwzorowanie $\tilde{\phi} : \pi^{-1} \to \mathbb{R}^{2n}$, gdzie $\pi : TM \to M$ jest rzutowaniem przekształcającym każdą przestrzeń $T_xM$ $(x \in M)$ na punkt $x$, wzorem

$$\tilde{\phi}(v) = (\phi(\pi(v)), v\phi_1, \ldots, v\phi_n).$$

Ze znanego wzoru wyrażającego pochodne cząstkowe funkcji złożonej poprzez pochodne funkcji składanych wynika od razu, że złożenia postaci $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ są — dla dowolnych map $\phi$ i $\psi$ na $M$ — gładkie. Istnieje zatem dokładnie jedna topologia na $TM$, przy której wszystkie takie odwzorowania $\tilde{\phi}$ są homeomorfizmami. Łatwo się przekonać, że tak określona przestrzeń topologiczna $TM$ jest parazwarta. Zatem $TM$ z maksymalnym atlasem zawierającym wszystkie takie przekształcenia $\tilde{\phi}$ jest rozmaitością gładką wymiaru $2 \dim M$. Nazywa się ją *wiązką styczną* rozmaitości $M$.

Podobnie, suma rozłączna $T^*M$ *przestrzeni kostycznych* $T^*_xM$ (tj. przestrzeni dualnych do $T_xM$), $x \in M$, może być w naturalny sposób wyposażona w strukturę rozmaitości wymiaru $2n$, na której mapami są przekształcenia postaci $\tilde{\phi}$,

$$\tilde{\phi}(v^*) = (\phi(x), v^*((\partial/\partial\phi_1(x))), \ldots, v^*((\partial/\partial\phi_n(x)))),$$

gdy $\phi$ jest mapą w otoczeniu punktu $x \in M$ i $v^* \in T^*_xM$. Rozmaitość tę nazywa się *wiązką kostyczną* rozmaitości $M$.

**Ćwiczenie 2.3.1** Opisz strukturę różniczkową *wiązek* $T^{(r,s)}M$ *tensorów* typu $(r, s)$ określonych oczywiście jako sumy rozłączne przestrzeni tensorów $T^{(r,s)}(T_xM))$, $x \in M$.

## 2.4 Różniczka odwzorowania

Niech $F : M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim, $x \in M$. *Różniczką* odwzorowania $F$ w punkcie $x$ nazywamy przekształcenie liniowe $dF(x) : T_xM \to T_{F(x)}N$ takie, że

$$dF(x)(v)f = v(f \circ F) \tag{2.4.1}$$

dla wszystkich $v \in T_xM$ i $f \in C^\infty(M)$. Jeżeli $\phi$ (odp., $\psi$) jest mapą na $M$ (odp., na $N$) określoną w otoczeniu punktu $x$ (odp., $F(x)$), to macierzą różniczki $dF(x)$ w bazach $((\partial/\partial\phi_i)(x))$ i $((\partial/\partial\psi_j)(F(x)))$ przestrzeni stycznych $T_xM$ i $T_{F(x)}N$ jest macierz Jakobiego złożenia $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ (w punkcie $\phi(x)$). Oczywiście, $d\,\mathrm{id}_M(x) = \mathrm{id}_{T_xM}$ i $d(G \circ F)(x) = dG(F(x)) \circ dF(x)$ dla dowolnych odwzorowań gładkich $F$ i $G$. W konsekwencji, $dF^{-1}(F(x)) = (dF(x))^{-1}$, gdy $F$ jest dyfeomorfizmem.

Jeżeli $F : M \to N$ jest przekształceniem gładkim, to $F_* = dF : TM \to TN$, $dF(v) = dF(x)(v)$, gdy $v \in T_xM$, jest przekształceniem gładkim wiązek stycznych, zaś dualne doń odwzorowanie $F^* : T^*N \to T^*M$,

$$F^*(w^*)(v) = w^*(F_*(v)), \quad v \in TM, \ w^* \in T^*N,$$

— przekształceniem gładkim wiązek kostycznych. Jeżeli $F$ jest dyfeomorfizmem, to dla dowolnych $r, s \geqslant 0$ można określić odwzorowanie gładkie $F_\# : T^{(r,s)}M \to T^{(r,s)}N$ wzorem

$$\begin{aligned} F_\#(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^s) = \\ F_*(v_1) \otimes \cdots \otimes F_*(v_r) \otimes (F^{-1})^*(v^1) \otimes \cdots \otimes (F^{-1})^*(v^s), \end{aligned}$$

gdzie $v_i \in T_xM$, $v^j \in T_x^*M$, $x \in M$. Ponieważ $T^{(0,0)}M = M \times \mathbb{R}$, więc $F_\#((x,a)) = (F(x), a)$, gdy $r = s = 0$, $x \in M$, $a \in \mathbb{R}$. Odwzorowanie gładkie $F : M \to N$ jest *regularne* w punkcie $x \in M$, gdy złożenie $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ jest regularne w punkcie $\phi(x)$ dla pewnych (równoważnie, dowolnych) map $\phi$ i $\psi$ na $M$ i $N$ określonych w otoczeniach punktów $x$ i $F(x)$. Punkt $y \in N$ jest *wartością regularną* odwzorowania $F$, gdy $F$ jest regularne w każdym punkcie zbioru $F^{-1}(\{y\})$. Odwzorowanie $F$ regularne we wszystkich punktach rozmaitości $M$ nazywamy *imersją*, gdy $\dim M \leqslant \dim N$, zaś *submersją*, gdy $\dim M \geqslant \dim N$. Zatem, $F$ jest imersją (odp., submersją) wtedy i tylko wtedy, gdy różniczka $dF(x)$ jest monomorfizmem (odp., epimorfizmem) dla dowolnego $x \in M$.

Przyjmuje się, że podzbiór $A$ rozmaitości $M$ jest *zbiorem o zerowej mierze Lebesgue'a*, gdy dla dowolnej mapy $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ na $M$ obraz $\phi(A \cap U)$ ma zerową miarę Lebesgue'a w $\mathbb{R}^m$. Przy tej definicji, z twierdzenia Sarda dla odwzorowań przestrzeni euklidesowych wynika od razu analogiczne twierdzenie Sarda dla odwzorowań rozmaitości:

**Twierdzenie 2.4.1** *Zbiór wartości krytycznych dowolnego odwzorowania gładkiego $F : M \to N$ ma zerową miarę Lebesgue'a.* $\square$

Z rozważań paragrafu 2.1.2 wynika od razu następująca charakteryzacja imersji i submersji.

**Twierdzenie 2.4.2** *Odwzorowanie gładkie $F : M \to N$ jest imersją (odp., submersją) wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim M \leqslant \dim N$ (odp., $\dim M \geqslant \dim N$) oraz dla każdego punktu $x \in M$ istnieją mapy $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ i $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ na $M$ i $N$, określone w otoczeniach $U$ punktu $x$ i $V$ punktu $F(x)$ i takie, że $F(U) \subset V$ oraz*

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

*(odp.,*

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n))$$

*dla dowolnego punktu $(x_1, \dots, x_m)$ zbioru $\phi(U)$.* □

Oczywiście, wynika stąd, że imersje są przekształceniami lokalnie odwracalnymi, zaś submersje — przekształceniami otwartymi.

Podobnie, z twierdzenia o dyfeomorfizmach dla przekształceń przestrzeni euklidesowych wynika analogiczne twierdzenie o przekształceniach rozmaitości gładkich.

**Twierdzenie 2.4.3** *Przekształcenie gładkie $F : M \to N$ jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia punktu $x \in M$ na otoczenie punktu $F(x) \in N$ wtedy i tylko wtedy, gdy różniczka $dF(x)$ jest izomorfizmem przestrzeni stycznych. Przekształcenie to jest dyfeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowe, $F(M) = N$ i jego różniczka w dowolnym punkcie rozmaitości $M$ jest izomorfizmem przestrzeni stycznych.* □

**Ćwiczenie 2.4.4** (a) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $r_1, r_2$ takich, że $r_1^2 + r_2^2 = 1$ przekształcenie $F : T^2 \to S^3$ określone dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, z_2$ o module 1 wzorem

$$F(z_1, z_2) = (z_1/r_1, z_2/r_2) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$$

jest imersją. (Obraz $F(T^2) \subset S^3$ nazywa się *torusem Clifforda.*)(b) Wykaż, że tzw. *rozwłóknienie Hopfa*, tj. przekształcenie $F : S^3 \to S^2$ określone dla dowolnego punktu $(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ wzorami

$$F(z_1, z_2) = \begin{cases} (\phi^+)^{-1}(\frac{z_1}{z_2}), & \text{gdy } z_2 \neq 0, \\ (1, 0, 0), & \text{gdy } z_2 = 0, \end{cases}$$

gdzie $\phi^+$ jest rzutem stereograficznym z punktu $(1, 0, 0)$ sfery $S^2$ (por. przykład 1.2.2), jest submersją. (c) Opisz dowolny dyfeomorfizm sfery $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ z elipsoidą określoną równaniem $\sum_{j=1}^3 (x_j/a_j)^2 = 1$.

## 2.5 Podrozmaitości

Jeżeli $F : M \to N$ jest imersją różnowartościową, to zbiór $F(M)$ daje się w $N$ opisać lokalnie równaniami $x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0$, gdzie $m = \dim M \leqslant n = \dim N$. Dokładniej, dla dowolnego $x \in M$ istnieje otoczenie $U$ punktu $x$ i mapa $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ na $N$ w otoczeniu $V$ punktu $F(x)$ taka, że $F(U) \subset V$ i

$$y \in F(U) \leftrightarrow y \in V \text{ and } \phi_j(y) = 0 \text{ dla } j = m+1, \ldots, n.$$

W takim przypadku, $F(M)$ nazywamy *podrozmaitością imersyjną* rozmaitości $N$. Na ogół topologia rozmaitości na podrozmaitości imersyjnej jest bogatsza niż topologia indukowana z rozmaitości otaczjącej: jeżeli $W \subset N$ jest zbiorem otwartym, to $F^{-1}(W)$ jest też zbiorem otwartym w $M$, ale istnieją zbiory otwarte w $M$, które nie dadzą się przedstawić jako przeciwobrazy zbiorów otwartych w $N$. Jeżeli topologia indukowana na $F(M)$ z rozmaitości $N$ pokrywa się z topologią rozmaitości, tzn. jeżeli zbiór $A \subset M$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $A = F^{-1}(W)$ dla pewnego zbioru $W$ otwartego w $N$, to $F$ nazywamy *włożeniem*, a $F(M)$ — *podrozmaitością włożoną* lub *regularną*, krótko — *podrozmaitością*.

Z lokalnego opisu odwzorowań gładkich w otoczeniu punktów regularnych wynika łatwo, że przeciwobraz wartości regularnej dowolnego odwzorowania gładkiego $F : M \to N$ jest podrozmaitością włożoną rozmaitości $M$. Podobnie, wykres dowolnego odwzorowania gładkiego $F : M \to N$ jest podrozmaitością produktu $M \times N$.

**Przykład 2.5.1** Weźmy ustaloną liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ i określmy przekształcenie $F : \mathbb{R} \to T^2$ wzorem

$$F(t) = \left(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}\right).$$

Jeżeli $\alpha/\pi$ jest liczbą wymierną, to $F$ indukuje imersję różnowartościową okręgu $S^1$ w $T^2$ i $F(\mathbb{R})$ jest podrozmaitością regularną torusa. Jeżeli $\alpha/\pi$ jest liczbą niewymierną, to samo $F$ jest imersją różnowartościową i $F(M)$ jest gęstą w $T^2$ podrozmaitością imersyjną.

**Ćwiczenie 2.5.2** Skonstruuj podobne podrozmaitości torusa $T^n$, $n > 2$, otrzymane z imersji $F : \mathbb{R}^m \to T^n$, $1 \leqslant m < n$.

## 2.6 Elementy rachunku tensorowego

### 2.6.1 Algebra tensorowa

*Iloczynem tensorowym* dowolnych przestrzeni wektorowych $V_1, \ldots, V_n$ nad ciałem $\mathbb{R}$ nazywamy taką przestrzeń wektorową $W$ wraz z przekształceniem wieloliniowym

$p : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$, że dla dowolnej przestrzeni wektorowej $Z$ nad $\mathbb{R}$ i dowolnego przekształcenia wieloliniowego $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to Z$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\phi : W \to Z$, dla którego zachodzi równość $f = \phi \circ p$. Powyższą własność iloczynu tensorowego nazywa się *własnością jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji* (ze względu na wszystkie przekształcenia wieloliniowe). Para $(W, p)$ spełniająca warunki powyższej definicji istnieje dla dowolnych przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$. Istotnie, przyjmijmy, że $X$ jest przestrzenią wszystkich funkcji $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{R}$ przyjmujących wartości niezerowe w skończonej liczbie punktów, $a(v_1, \ldots v_n)$ oznacza funkcję z $X$ przyjmującą warość $a \in \mathbb{R}$ w punkcie $(v_1, \ldots v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ i zerującą się tożsamościowo poza tym punktem, zaś $Y \subset X$ jest podprzestrzenią rozpiętą na wszystkich elementach postaci

$$a(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + (-1)(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_n)$$

i postaci

$$1(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n) + (-1)(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + (-1)(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n),$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, $v_1 \in V_1, \ldots, v_i, v_i' \in V_i, \ldots, v_n \in V_n$ oraz $i = 1, \ldots, n$. Wówczas przestrzeń ilorazowa $X/Y$ wraz z odwzorowaniem $p$ danym wzorem $p(v_1, \ldots, v_n) = 1(v_1, \ldots, v_n) + Y$, jest iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$. Co więcej, z własności jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji wynika od razu, że iloczyn tensorowy jest określony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Dokładniej, jeżeli dwie pary $(W, p)$ i $(W', p')$ spełniają warunki definicji iloczynu tensorowego tych samych przestrzeni wektorowych, to istnieje izomorfizm $F : W \to W'$ taki, że $p' = F \circ p$. Fakt ten pozwala oznaczać iloczyn tensorowy przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$ symbolem $V_1 \otimes \otimes V_n$, zaś obraz układu $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ w odpowiednim przekształceniu $p$ symbolem $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$. Mówi się, że $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ jest *iloczynem tensorowym* wektorów $v_i \in V_i$. Łatwo zauważyć, że każdy element iloczynu tensorowego przestrzeni można przedstawić (niejednoznacznie !) w postaci skończonej kombinacji liniowej iloczynów tensorowych wektorów. Niejednoznaczność takiego przedstawienia wynika z równości

$$a(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_n) = v_1 \otimes \ldots \otimes (av_i) \otimes \ldots \otimes v_n,$$

$$v_1 \otimes \ldots \otimes (v_i + v_i') \otimes \ldots \otimes v_n = v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_n + v_1 \otimes \ldots \otimes v_i' \otimes \ldots \otimes v_n,$$

które zachodzą dla dowolnych wektorów $v_j, v_j' \in V_j$ i dowolnego skalara $a \in \mathbb{R}$.

Z własności jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji wynika łatwo, że mnożenie tensorowe przestrzeni jest działaniem przemiennym i łącznym, w tym sensie, że iloczyny tensorowe $V \otimes W$ i $W \otimes V$ oraz $U \otimes (V \otimes W)$ i $(U \otimes V) \otimes W$ są kanonicznie izomorficzne.

**Ćwiczenie 2.6.1** Wykaż, że przekształcenie $a \otimes v \mapsto av$ jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R} \otimes V$ i $V$, zaś przekształcenie

$$V \otimes W^* \ni v \otimes w^* \mapsto z \in L(W;V),$$

gdzie $W^* = L(W;\mathbb{R})$ jest dualną do $W$ przestrzenią funkcjonałów liniowych na $W$, zaś

$$z(w) = w^*(w) \cdot v, \quad w \in W,$$

jest izomorfizmem przestrzeni $V \otimes W^*$ i $L(W,V)$. Ponadto, wskaż kanoniczny izomorfizm iloczynu tensorowego $V \otimes W_1^* \otimes \cdots \otimes W_n^*$ z przestrzenią $L(W_1, \ldots W_n; V)$ przekształceń wieloliniowych z $W_1 \times \cdots \times W_n$ do $V$.

Dla danej ustalonej przestrzeni wektorowej $V$ symbolem $T^{r,s}(V)$ oznaczymy iloczyn tensorowy $(r+s)$-czynników $V_i$, z których $r$ pokrywa się z $V$, zaś $s$ — z $V^*$, przestrzenią dualną do $V$. Elementy przestrzeni $T^{r,s}(V)$ nazywamy *tensorami typu* $(r,s)$ (nad $V$). Tensory typu $(0,s)$ nazywa się *kowariantnymi*, typu $(r,0)$ — *kontrawariantnymi*. Tensory kowariantne można więc utożsamiać z odpowiednimi wieloliniowymi przekształceniami o wartościach skalarnych. Podobnie, tensory typu $(1,s)$ nad $V$ można utożsamiać z odpowiednimi $s$-liniowymi przekształceniami o wartościach w $V$. Sumę prostą

$$\otimes^* V = \oplus_{r,s \geqslant 0} T^{r,s}(V)$$

nazywa się *algebrą tensorową* nad $V$. W algebrze tej działa mnożenie tensorowe $\otimes$ przyporządkowujące każdej parze tensorów dowolnych typów $(r,s)$ i $(r',s')$ tensor typu $(r+r', s+s')$.

**Ćwiczenie 2.6.2** Podaj wzór określający powyższe działanie.

W przestrzeniach tensorów typu $(r,s)$, gdzie $r \geqslant 1$ i $s \geqslant 1$, można rozważać operacje *kontrakcji* tensorów. Jeżeli $1 \leqslant k \leqslant r$ i $1 \leqslant l \leqslant s$, to kontrakcja $C_l^k : T^{r,s}(V) \to T^{r-1,s-1}(V)$ jest jedynym przekształceniem liniowym spełniającym warunek

$$\begin{aligned} &C_l^k(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \otimes \ldots \otimes v_r \otimes v^1 \otimes \ldots \otimes v^l \otimes \ldots \otimes v^s) \\ &\qquad = v^l(v_k) \cdot v_1 \otimes \ldots \otimes v_{k-1} \otimes v_{k+1} \otimes \ldots \otimes v_r \otimes v^1 \otimes \ldots \otimes v^{l-1} \otimes v^{l+1} \otimes \ldots \otimes v^s \end{aligned}$$

dla wszystkich $v_i \in V$ i $v^j \in V^*$.

**Ćwiczenie 2.6.3** Wykaż, że kontrakcje odpowiadające rozłącznym parom indeksów komutują. (Uwaga: Formalny zapis tego faktu wymaga precyzji !)

Powyższe uwagi pozwalają również łatwo wykazać, że jeżeli przestrzenie $V_i$, $i \leqslant n$, są skończonego wymiaru $m_i$ i wektory $v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i} \in V_i$ tworzą bazy tych przestrzeni, to wszystkie iloczyny tensorowe postaci

$$v_{1,j_1} \otimes \dots \otimes v_{n,j_n}, \; j_k \leqslant m_k, \; k = 1, \dots, n,$$

tworzą bazę iloczynu tensorowego $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, a więc

$$\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_n) = \dim V_1 \cdot \ldots \cdot \dim V_n.$$

Przestrzeń tensorów typu $(r, s)$ nad przestrzenią $m$-wymiarową ma zatem wymiar $m^{r+s}$, a jej bazę tworzą np. iloczyny postaci

$$v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_s},$$

gdzie $i_1, \dots i_r, j_1 \dots, j_s = 1, \dots, m$, $(v_1, \dots, v_m)$ jest bazą przestrzeni $V$, zaś $(v^1, \dots, v^m)$ dualną doń bazą przestrzeni $V^*$:

$$v^j(v_i) = \delta_i^j,$$

gdzie $\delta_i^j$ (podobnie jak gdzie indziej $\delta_{ij}$ i $\delta^{ij}$) oznacza tzw. *symbol Kroneckera* równy 1 gdy $i = j$ oraz 0 w przeciwnym razie. Każdy tensor typu $(r, s)$ można wtedy jednoznacznie przedstawić w postaci

$$\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_r=1}^{m} \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_s=1}^{m} a_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_s}.$$

Często w literaturze stosuje się tzw. *konwencję Einsteina*, która polega na pomijaniu znaku sumy w przypadku, gdy wskaźnik sumowania pojawia się jednocześnie jako indeks górny i dolny, a zakres jego zmienności nie budzi wątpliwości, np., gdy zmienia się on od 1 do wymiaru rozważanej przestrzeni. Przy pomocy tej konwencji powyższą sumę zapisalibyśmy w postaci

$$a_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_s}.$$

### 2.6.2 Algebra symetryczna i zewnętrzna

Przekształcenie wieloliniowe $f : V \times \dots \times V \to W$ nazywamy *symetrycznym* (odp., *skośnie symetrycznym* lub *antysymetrycznym*), gdy dla dowolnych wektorów $v_1, \dots v_n$ przestrzeni $V$ i dowolnej permutacji $n$-elementowej $\sigma$ zachodzi równość

$$f(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_n}) = f(v_1, \dots, v_n)$$

(odp., równość
$$f(v_{\sigma_1},\dots,v_{\sigma_n}) = \operatorname{sgn}\sigma\cdot f(v_1,\dots,v_n)).$$
Parę $(W,p)$ nazywamy $n$-tą *potęgą symetryczną* (odp., *potęgą zewnętrzną*) przestrzeni $V$, gdy posiada własność jednoznacznej uniwersalnej jednoznacznej faktoryzacji ze względu na przekształcenia symetryczne (odp., skośnie symetryczne). (Czytelnik z łatwością zinterpretuje powyższe sformułowanie.) Tak jak w przypadku iloczynu tensorowego dowolnych przestrzeni wektorowych można wykazać istnienie i jednoznaczność (z dokładnością do izomorfizmu) potęg symetrycznych i zewnętrznych. Można wykazać, że dowolna potęga symetryczna $\odot^n V$ (odp., potęga zewnętrzna $\wedge^n V$) przestrzeni $V$ jest izomorficzna z podprzestrzenią przestrzeni tensorów typu $(r,0)$ nad $V$ generowaną przez wszystkie tensory postaci
$$v_1\odot\cdots\odot v_n = \sum_\sigma v_{\sigma_1}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma_n}$$
(odp., postaci
$$v_1\wedge\ldots\wedge v_n = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\cdot v_{\sigma_1}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma_n}),$$
gdzie $v_1,\dots,v_n\in V$ i $\sigma$ przebiega wszystkie permutacje $n$-elementowe. Podobnie jak w przypadku iloczynu tensorowego, *algebrę symetryczną* (odp., *algebrę zewnętrzną*) nad $V$ definiuje się jako sumę prostą
$$\odot^* V = \oplus_{n\geqslant 0}\odot^n V \quad (\text{odp., } \wedge^* V = \oplus_{n\geqslant 0}\wedge^n V)$$
z działaniem wewnętrznym $\odot$ (odp., $\wedge$) danym wzorem
$$(v_1\odot\cdots\odot v_k)\odot(v_{k+1}\odot\cdots\odot v_{k+l}) = v_1\odot\cdots\odot v_{k+l}$$
(odp., wzorem
$$(v_1\wedge\cdots\wedge v_k)\wedge(v_{k+1}\wedge\cdots\wedge v_{k+l}) = v_1\wedge\cdots\wedge v_{k+l}).$$

**Ćwiczenie 2.6.4** Wyprowadź podstawowe własności (łączność, przemienność (?!) itd.) działań $\odot$ i $\wedge$ w algebrach $\odot^* V$ i $\wedge^* V$. Wyznacz wymiary potęg $\odot^n V$ i $\wedge^n V$ oraz pełnej algebry zewnętrznej $\wedge^* V$, gdy $\dim V = m$.

# 2.7 Pola wektorowe

## 2.7.1 Pierścień pól wektorowych

Jeśli $M$ jest rozmaitością gładką, $TM$ jej wiązką styczną i $\pi : TM \to M$ naturalną projekcją, to *polem wektorowym* na $M$ nazywamy dowolny *przekrój* wiązki $TM$, tzn.

dowolne odwzorowanie $X : M \to TM$ gładkie i takie, że $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Innymi słowy, $X$ jest gładkie i przyporządkowuje każdemu $x \in M$ wektor $X(x)$ styczny do $M$ w punkcie $x$.

Wszystkie pola wektorowe na $M$ wraz z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia przez funkcje,

$$(X+Y)(x) = X(x) + Y(x), \quad (fX)(x) = f(x) \cdot X(x),$$

tworzą moduł $\mathcal{X}(M)$ nad pierścieniem $\mathrm{C}^\infty(M)$ funkcji gładkich. Własności pierścienia $\mathrm{C}^\infty(X)$ pozwalają pokazać m.in., że każde pole wektorowe $X$ na zbiorze otwartym $U \subset M$ może być przedłużone do pola $\tilde{X}$ na całym $M$ w taki sposób, że $\tilde{X} = X$ na dowolnym, z góry zadanym zbiorze zwartym $K \subset U$. W szczególności, dla każdego $v \in T_xM$, $x \in M$, istnieją takie pola wektorowe $X$, dla których $X(x) = v$.

Tak jak w przypadku funkcji rzeczywistych możemy mówić o *nośniku pola wektorowego* $X$: jest to domknięcie $\operatorname{supp} X$ zbioru tych punktów $x \in M$, dla których $X(x) \neq 0$. Ostatnią obserwację dotyczącą istnienia pól wektorowych można wzmocnić w następujący sposób: dla dowolnego $v \in T_xM$, $x \in M$, i dowolnego otoczenia $U$ punktu $x$ istnieje pole wektorowe $X$ takie, że $X(x) = v$ i $\operatorname{supp} X \subset U$.

Jeżeli $X$ jest polem wektorowym na $M$ i $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, to *pochodną* funkcji $f$ *w kierunku pola* $X$ nazywamy funkcję $Xf$ określoną wzorem

$$Xf(x) = X(x)f.$$

Jeśli $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ jest mapą na $M$ i $X = \sum_j X_j(\partial/\partial\phi_j)$ na dziedzinie $U$ mapy $\phi$, to

$$Xf = \sum_j X_j \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{dx_j} \circ \phi$$

na $U$, a więc $Xf \in \mathrm{C}^\infty(M)$. Oczywiście

$$X(af+bg) = aXf + bXg \quad \text{oraz} \quad X(fg) = Xf \cdot g + f \cdot Xg$$

dla dowlnych $a, b \in \mathbb{R}$ i $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$. Zatem, $X$ wyznacza spełniające stosowny warunek Leibniza przekształcenie $\mathbb{R}$-liniowe pierścienia $\mathrm{C}^\infty(M)$. Mówimy króko, że $X$ jest *różniczkowaniem* pierścienia $X$. Łatwo zauważyć, że każde różniczkowanie tego pierścienia wyznacza jednoznacznie pole wektorowe na $M$, a więc pola wektorowe na $M$ można utożsamiać z różniczkowaniami pierścienia funkcji gładkich na $M$. Istotnie, jeżeli $X$ jest takim różniczkowaniem i $x \in M$, to przyporządkowanie

$$\mathrm{C}^\infty(M) \ni f \mapsto (Xf)(x)$$

jest wektorem przestrzeni stycznej $T_xM$; oznaczając go symbolem $X(x)$ otrzymujemy przyporządkowanie $M \ni x \mapsto X(x)$, które jest polem wektorowym w sensie określenia przyjętego na początku tego paragrafu.

### 2.7.2 Krzywe całkowe i potok pola wektorowego

*Krzywą* na rozmaitości $M$ nazywamy dowolne odwzorowanie gładkie $\gamma : I \to M$, gdzie $I$ jest przedziałem otwartym lub domkniętym. Jeśli $I$ jest przedziałem domkniętym, to gładkość odwzorowania $I$ rozumiemy jako możliwość przedłużenia $\gamma$ to odzworowania gładkiego $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to M$, gdzie $\tilde{I}$ jest pewnym przedziałem otwartym zawierającym $\gamma$. Dla dowolnej krzywej $\gamma$ przyjmujemy oznaczenie

$$\dot{\gamma}(s) = d\gamma(s)(d/dt),$$

gdzie $d/dt$ oznacza pole wektorowe na $\mathbb{R}$ pochodzące od mapy $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Zatem, $\dot{\gamma}(s)$ jest wektorem stycznym do $M$ w punkcie $\gamma(s)$. Mówimy o nim jako o *wektorze stycznym do krzywej* $\gamma$ w chwili $s$.

Krzywą $\gamma : I \to M$ nazywamy *krzywą całkową* pola wektorowego $X$, gdy

$$\dot{\gamma}(s) = X(\gamma(s))$$

dla każdego $s \in I$. Jeżeli $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m) : U \to \mathbb{R}^m$ jest mapą na $M$, to $\gamma : I \to U$ jest krzywą całkową pola $X = \sum_{j=1}^m X_j \cdot (\partial/\partial\phi_j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $\gamma_j = \phi_j \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ spełniają układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = X_j \circ \gamma, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.7.1}$$

Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych zastosowanej do układu (2.7.1) wynika od razu następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 2.7.1** *Dla każdego pola wektorowego $X$ na rozmaitości $M$ i każdego punktu $x \in M$ istnieje krzywa całkowa $\gamma : I \to M$ pola $X$ taka, że $0 \in I$ i $\gamma(0) = x$. Dwie takie krzywe pokrywają się na części wspólnej swoich dziedzin, a zatem istnieje dokładnie jedna maksymalna (tj. o maksymalnej dziedzinie) krzywa całkowa $\gamma_x : I_x \to M$ spełniająca warunek początkowy $\gamma_x(0) = x$. Przyporządkowanie*

$$(x, t) \mapsto \gamma_x(t)$$

*jest gładkim przekształceniem zbioru otwartego $U_X = \cup_{x \in M} \{x\} \times I_x \subset M \times \mathbb{R}$ w $M$.*
□

Krzywą $\gamma_x$ z powyższego twierdzenia nazywamy *trajektorią* pola wektorowego $X$. Łatwo sprawdzić, że jeżeli $y = \gamma_x(s)$, to $\gamma_y(t) = \gamma_x(s + t)$ tam, gdzie obie strony równości są określone. Przyjmując oznaczenie

$$\Phi_t(x) = \gamma_x(t)$$

dla wszystkich $(x,t) \in U_X$ powyższą obserwację można zapisać w postaci

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s. \tag{2.7.2}$$

Równość w (2.7.2) oznacza równość wartości przekształceń po obu jej stronach dla wsystkich punktów, dla których obie strony są określone. W szczególnści, z (2.7.2) wynika, że $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$, zaś $\Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}$. Wynika stąd, że wszystkie przekształcenia $\Phi_t$ są dyfeomorfizmami otwartych podzbiorów rozmaitości $M$. Ponadto, przekształcenie $\Phi : U_X \to M$, $\Phi(x,t) = \Phi_t(x)$, jest gładkie.

Jeżeli $x \in M$, $U$ jest otwartym otoczeniem punktu $x$, $\varepsilon > 0$ i $U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_X$, to $\Phi|U \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ nazywamy *potokiem lokalnym* pola $X$ w punkcie $x$. Jeżeli $U_x = M \times \mathbb{R}$, tzn. jeśli każda maksymalna krzywa całkowa pola $X$ jest określona na całej prostej $\mathbb{R}$, to mówimy, że pole $X$ jest *zupełne*, a odwzorowanie $\Phi$ opisane powyżej nazywamy *potokiem* pola $X$. Ogólniej, każdą jednoparametrową rodzinę $(\Phi_t, t \in \mathbb{R})$ spełniającą warunek (2.7.2) i taką, że odpowiadające jej przekształcenie $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ jest gładkie nazywmay *potokiem* na $M$. Innymi słowy, potok na $M$ jest gładkim homomorfizmem grupy addytywnej liczb rzeczywistych w grupę dyfeomorfizmów rozmaitości $M$. Łatwo wykazać, że każdy potok pochodzi od pewnego pola wektorowego. Istotnie, jeżeli przyjmiemy, że

$$X(x) = (t \mapsto \Phi_t(x))\dot{}(0), \quad x \in M,$$

to $X$ będzie gładkim polem wektorowym na $M$ dla którego krzywe

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi_t(x)$$

będą trajektoriami, a więc $(\Phi_t)$ będzie jego potokiem.

**Ćwiczenie 2.7.2** Wyznacz potoki następujących pól wektorowych:
(a) $X = d/dt$ na prostej $\mathbb{R}$,
(b) $X(x_1,x_2) = x_2(\partial/\partial x_1) - x_1(\partial/\partial x_2)$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$,
(c) $X(x_1,x_2,x_3) = (x_2 - x_1x_3^2)(\partial/\partial x_1) - (x_1 + x_2x_3^2)(\partial/\partial x_2) + x_3(1-x_3^2)(\partial/\partial x_3)$ na sferze $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Wykażemy teraz, że każde pole wektorowe na rozmaitości zwartej jest zupełne, a co więcej, że zachodzi następujące

**Twierdzenie 2.7.3** *Każde pole wektorowe o zwartym nośniku jest zupełne.*

*Proof.* Załóżmy, ze nośnik $\operatorname{supp} X = \overline{\{x \in M; X(x) \neq 0\}}$ pola wektorowego $X$ jest zwarty, weźmy dowolny punkt $x \in M$ i trajektorię $\gamma_x : I_x \to M$. Jeśli $x \neq \operatorname{supp} X$, to $X(x) = 0$ i $\gamma_x(t) = x$, $t \in \mathbb{R}$, jest krzywą całkową pola $X$, a więc $I_x = \mathbb{R}$. Przypuśćmy więc, że $x \in \operatorname{supp} X$, $I_x = (a,b)$ i np. $b < \infty$. Weźmy dowolny ciąg $(t_n)$

rosnący do $b$. Ponieważ wszystkie punkty $\gamma_x(t_n)$ leżą w nośniku pola $X$, więc ciąg $(\gamma_x(t_n))$ ma pewien punkt skupienia $x_0$. Niech $U$ będzie takim otoczeniem punktu $x_0$, że $U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_X$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $n$ na tyle duże by $b - t_n < \varepsilon$ i takie, że $y = \gamma_x(t_n) \in U$. Krzywa $\tilde{\gamma}$ dana wzorami

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_x(t), & \text{gdy } a < t < b, \\ \gamma_y(b - t_n), & \text{gdy } t_n < t < t_n + \varepsilon, \end{cases}$$

jest dobrze określoną krzywą całkową pola $X$, a jej dziedziną jest przedział$(a, t_n + \varepsilon)$ istotnie szerszy niż $(a, b)$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $b = \infty$. Podobnie można uzasadnić równość $a = -\infty$. Zatem, $I_x = \mathbb{R}$. $\square$

### 2.7.3 Nawias Liego

Niech $X$ i $Y$ będą polami wektorowymi na $M$. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ połóżmy

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Łatwo sprawdzić, że $[X, Y]$ jest $\mathbb{R}$-liniowe i spełnia warunek Leibniza. Istotnie, dla dowolnych funkcji $f$ i $g$ mamy

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Yf \cdot g + fYg) - Y(Xf \cdot g + fXg) \\ &= X(Yf) \cdot g + Yf \cdot Xg + Xf \cdot Yg + fX(Yg) \\ &\quad - Y(Xf) \cdot g - Xf \cdot Yg - Yf \cdot Xg - fY(Xg) \\ &= [X, Y]f \cdot g + f \cdot [X, Y]g. \end{aligned}$$

$[X, Y]$ jest więc różniczkowaniem pierścienia $\mathrm{C}^\infty(M)$ i wyznacza jednoznacznie pole wektorowe — oznaczane też symbolem $[X, Y]$ — na $M$. Pole $[X, Y]$ nazywamy *nawiasem Liego* pól $X$ i $Y$.

**Ćwiczenie 2.7.4** Sprawdź, że

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(ii) $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$,

(iii) $[X, fY] = f[X, Y] + Xf \cdot Y$,

(iv) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

dla dowolnych pól wektorowych $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ i dowolnej funkcji $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$.

Warunek (iv) w powyższym ćwiczeniu nosi nazwę *tożsamości Jakobiego*. Z powyższych własności nawiasu Liego oraz z oczywistych równości $[\partial/\partial\phi_i, \partial/\partial\phi_j] = 0$ spełnionych dla dowolnej mapy $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_j)$ na $M$ i dowolnych $i, j$ wynika, że jeżeli $X = \sum_i X_i(\partial/\partial\phi_i)$ oraz $Y = \sum_j Y_j(\partial/\partial\phi_j)$, to

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial \phi_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial \phi_i} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_j}.$$

Pokażemy jeszcze związek nawiasu Liego $[X, Y]$ z potokiem pola $X$.

**Twierdzenie 2.7.5** *Jeżeli $(\Phi_t)$ jest potokiem lokalnym pola $X$ w punkcie $x \in M$, to*

$$[X, Y](x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left( Y(x) - d\Phi_t(Y(\Phi_{-t}(x)) \right) \tag{2.7.3}$$

*dla dowolnego pola wektorowego $Y$ na $M$.*

*Dowód.* Dla dowolnej funkcji $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ przyjmijmy

$$g(t, y) = f(\Phi_t(y)) - f(y)$$

oraz

$$h_t(y) = \int_0^1 g(ts)ds.$$

Wtedy

$$f \circ \Phi_t - f = t \cdot h_t$$

oraz

$$h_0 = \lim_{t\to 0} h_t = \lim_{t\to 0} \frac{f \circ \Phi_t - f}{t} = Xf.$$

Zatem

$$d\Phi_t(Y(\Phi_{-t}))f = Y(\Phi_{-t}(x))(f \circ \Phi_t) = Y(\Phi_{-t}(x))f + tY(\Phi_{-t}(x))h_t$$

i, w konsekwencji,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left( Y(x) - d\Phi_t(Y(\Phi_{-t}(x))) \right) f &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left( Y(x)f - Y(\Phi_{-t}x))f \right) + Y(x)h_0 \\ &= X(x)Yf - Y(x)Xf = [X, Y](x)f. \end{aligned}$$

□

**Ćwiczenie 2.7.6** Określmy pola wektorowe $X_1, X_2, X_3$ na sferze $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ wzorami

$$X_1(x_1, \ldots, x_4) = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$X_2(x_1, \ldots, x_4) = x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$X_3(x_1, \ldots, x_4) = x_1\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Wyznacz wszystkie nawiasy Liego $[X_j, X_k]$, gdzie $j, k = 1, 2, 3$.

## 2.8 Pola tensorowe

Podobnie do pól wektorowych, *pola tensorowe* typu $(r, s)$ definiujemy jako przekroje wiązki $T^{r,s}(M)$, tj. jako takie gładkie odwzorowania $S : M \to T^{(r,s)}(M)$, że $S(x) \in T_x^{(r,s)}(M)$ dla każdego $x \in M$. Działania dodawania, mnożenia przez skalary i mnożenia tensorowego przestrzeniach $T_x^{(r,s)}M$, $x \in M$, prowadzą do odpowiednich działań w zbiorze pól tensorowych:

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x),\ (fS)(x) = f(x)S(x),\ (S \otimes T)(x) = S(x) \otimes T(x),$$

gdy tylko prawe strony powyższych równości mają sens. Podobnie, kontrakcje $C_k^j$ działające w przestrzeniach $T_x^{(r,s)}M$, $x \in M$, stosowane punktowo,

$$(C_k^j S)(x) = C_k^j(S(x)),$$

prowadzą od gładkich pól tensorowych typu $(r, s)$ do gładkich pól tensorowych typu $(r - 1, s - 1)$. Zbiór wszystkich pól tensorowych typu $(r, s)$ wraz z dodawaniam i mnożeniem przez funkcje gładkie tworzy moduł $\mathcal{T}^{(r,s)}M$ nad pierścieniem $\mathrm{C}^\infty(M)$. Oczywiście $\mathcal{T}^{(0,0)}M = \mathrm{C}^\infty(M)$ oraz $\mathcal{T}^{(1,0)}M = \mathcal{X}(M)$.

Moduły pól tensorowych posiadają własności podobne do modułu pól wektorowych: każdy tensor $s \in T_x^{(r,s)}M$ można przedłużyć do pola tensorowego $S$ o nośniku (Czytelnik z łatwością napisze stosowną definicję nośnika pola tensorowego) zawartym w danym otoczeniu punktu $x$, dowolne pole tensorowe $S$ określone na zbiorze otwartym $U \subset M$ można przedłużyć do pola $\tilde{S}$ na całej rozmaitości $M$ w taki sposób by $\tilde{S} = S$ na danym zbiorze zwartym $K \subset U$, itd. Suma prosta $\mathcal{T}^*M$ wszystkich modułów $\mathcal{T}^{(r,s)}M$ jest algebrą nad pierścieniem funkcji gładkich na $M$.

Z informacji podanych w paragrafach 2.6.1 i 2.7.1 wynika, że pola tensorowe typu $(0, s)$ (odp., typu $(1, s)$) można utożsamiać z $s$-liniowymi (nad pierścieniem $\mathrm{C}^\infty(M)$) przeskształceniami przyporządkowującymi funkcje gładkie (odp., pola wektorowe) dowolnym układom $s$ pól wektorowych. Łatwo zauważyć, że jeśli jedno z pól wektorowych $X_i$ zeruje się w pewnym punkcie $x \in M$, to $S(X_1, \ldots, X_s)(x) = 0$ dla dowolnego pola typu $(0, s)$ (lub, $(1, s)$).

Nawias Liego pozwala określić dla dowolnego pola wektorowego $X$ pewne różniczkowanie $\mathcal{L}_X$ algebry pól tensorowych $\mathcal{T}^*M$. Dokładniej, mamy następujące

**Twierdzenie 2.8.1** *Dla dowolnego pola wektorowego $X$ istnieje dokładnie jedno odzworowanie $\mathcal{L}_X : \mathcal{T}^*\mathcal{M} \to \mathcal{T}^*\mathcal{M}$ zachowujące typy pól tensorowych i takie, że*

*(i)* $\mathcal{L}_X f = Xf$ *i* $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ *dla dowolnych* $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ *i* $Y \in \mathcal{X}(M)$,

*(ii)* $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = \mathcal{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T$ *dla dowolnych pól tensorowych* $S$ *i* $T$,

*(iii)* $\mathcal{L}_X \circ C = C \circ \mathcal{L}_X$ *dla dowolnej kontrakcji* $C$ *takiej, że obie strony powyższej równości mają sens.*

*Ponadto,*

*(iv)* $\mathcal{L}_{aX+bY} = a\mathcal{L}_X + b\mathcal{L}_Y$ *dla dowolnych* $a, b \in \mathbb{R}$ *i* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Pole tensorowe $\mathcal{L}_X S$ nazywa się *pochodną Liego* pola $X$ w kierunku pola wektorowego $X$.

*Proof.* Z warunków (i) - (iii) wynika, że jeżeli $\omega$ jest polem tensorowym typu $(0, 1)$, to dla dowolnego pola wektorowego $Y$ mamy

$$\begin{aligned} X\omega(Y) &= \mathcal{L}_X C_1^1(Y \otimes \omega) = C_1^1 \mathcal{L}_X(Y \otimes \omega) \\ &= C_1^1(\mathcal{L}_X Y \otimes \omega + Y \otimes \mathcal{L}_X \omega) = \omega([X, Y]) + \mathcal{L}_X \omega(Y). \end{aligned}$$

Wynika stąd równość

$$\mathcal{L}_X \omega(Y) = X\omega(Y) - \omega([X, Y]), \tag{2.8.1}$$

która definiuje warotści różniczkowania $\mathcal{L}_X$ na polach tensorowych typu $(0, 1)$. Ponieważ każdy tensor typu $(r, s)$ jest sumą iloczynów tensorowych $r$ wektorów i $s$ kowektorów, więc każde pole tensorowe jest sumą iloczynów tensorowych $r$ pól typu $(1, 0)$ i $s$ pól typu $(0, 1)$, a zatem warunki (i) i (ii) naszego twierdzenia wraz z równością (2.8.1) wyznaczają jednoznacznie wartości różniczkowania $\mathcal{L}_X$ na polach tensorowych wszystkich typów.

**Ćwiczenie 2.8.2** Sprawdź, że zdefiniowane w ten sposób różniczkowanie $\mathcal{L}_X$ jest określone poprawnie (tzn., że wartość $\mathcal{L}_X S$ nie zależy od przedstawienia pola $S$ w postaci sumy iloczynów tensorowych) i spełnia warunki (i) - (iv) twierdzenia.

Powyższe ćwiczenie kończy dowód twierdzenia. $\square$

**Ćwiczenie 2.8.3** (a) Wykaż, że dla dowolnego pola tensorowego $S$ typu $(0, s)$ (odp., typu $(1, s)$) i dowolnych pól wektorowych $X, X_1, \dots, X_s$ zachodzi równość

$$(\mathcal{L}_X S)(X_1, \dots, X_s) = X(S(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{j=1}^{s} S(X_1, \dots, X_{j-1}, [X, X_j], X_{j+1}, \dots, X_s)$$

(odp., równość

$$(\mathcal{L}_X S)(X_1, \dots, X_s) = [X, S(X_1, \dots, X_s)] - \sum_{j=1}^{s} S(X_1, \dots, X_{j-1}, [X, X_j], X_{j+1}, \dots, X_s)).$$

(b) Wykaż, że jeśli $(\Phi_t)$ jest lokalnym potokiem pola $X$ w otoczeniu punktu $x$, to dla dowolnego pola tensorowego $S$ zachodzi równość

$$\mathcal{L}_X S(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left( S(x) - (\Phi_{t\#} S(\Phi_{-t}(x))) \right). \tag{2.8.2}$$

# 2.9 Formy zewnętrzne

## 2.9.1 Algebra form zewnętrznych

Skośnie symetryczne pola tensorowe typu $(0, r)$ nazywa się *$r$-formami zewnętrznymi* lub *$r$-formami różniczkowymi*, krótko - *$r$-formami*. Wszystkie $r$-formy na $M$ tworzą podmoduł $\lambda^r(M)$ modułu $\mathcal{T}^{(0,r)}M$. Oczywiście, $\lambda^0 M = \mathrm{C}^\infty(M)$, $\lambda^1 M = \mathcal{T}^{(0,1)}M$ i $\lambda^r M = \{0\}$ dla wszystkich $k \geqslant m = \dim M$.

Każda $r$-forma może być przedstawiona jako kombinacja liniowa (o współczynnikach w $\mathrm{C}^\infty(M)$) iloczynów zewnętrznych 1-form. Najprostszym przykładem 1-formy jest różniczka funkcji gładkiej $f$ określona wzorem

$$df(X) = Xf.$$

Jeżeli $\phi := (\phi_1, \dots, \phi_m) : U \to \mathbb{R}^m$ jest mapą na $M$, to różniczki $d\phi_j$, $j \leqslant m$, stanowią bazę przestrzeni 1-form na $U$, a więc każdą $r$-formę na $U$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej różniczek $d\phi_j$:

$$\omega = \sum_{j_1, \dots, j_r = 1}^{m} f_{j_1, \dots, j_r} d\phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{j_r}. \tag{2.9.1}$$

Suma prosta $\lambda^* = \oplus_{r=0}^m \lambda^r M$ wraz z działającym punktowo,

$$(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x), \quad x \in M,$$

mnożeniem zewnętrznym $\wedge$ jest *algebrą form zewnętrznych* na $M$ (nad pierścieniem $C^\infty(M)$). Wszystkie własności mnożenia zewnętrznego w przestrzeniach wektorowych (por. ćwiczenie 2.6.4) przenoszą się na mnożenie zewnętrzne form. Łatwo też zauważyć, że dla dowolnego pola wektorowego $X$ i dowolnej $r$-formy $\omega$, $r \geqslant 1$, kontrakcja

$$\iota_X\omega = C_1^1(X \otimes \omega)$$

jest $(r-1)$-formą. Przyjmuje się też, że $\iota_X f = 0$ dla dowolnej funkcji (tj., 0-formy) $f$.

**Ćwiczenie 2.9.1** Wykaż, że jeśli $\omega$ jest $r$-formą, $X$ — polem wektorowym, zaś $\eta$ — $s$-formą, to

$$\iota_X(\omega \wedge \eta) = \iota_X\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge \iota_X\eta.$$

### 2.9.2 Orientacja

Przypomnijmy, że dwie uporządkowane bazy $v = (v_1, \dots, v_n)$ i $w = (w_1, \dots, w_n)$ przestrzeni wektorowej $V$ są *zgodnie zorientowane*, gdy $w_i = \sum_j a_{ij}v_j$ i $\det[a_{ij}] > 0$. Relacja zgodnej orientacji jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich baz przestrzeni $V$, wyznacza tam dokładnie dwie klasy abstrakcji, a każdą z nich nazywamy *orientacją* przestrzeni $V$. *Zorientowana przestrzeń wektorowa* to przestrzeń wektorowa z wybraną orientacją. Mówimy przy tym, że baza $v$ jest *dodatnio zorientowana*, gdy należy do wybranej orientacji przestrzeni $V$.

*Orientacją rozmaitości* $M$ nazywamy ciągłe przyporządkowanie punktowi $x \in M$ orientacji przestrzeni stycznej $T_xM$. Ciągłość takiego przyporządkowania oznacza, że każdy punkt $x \in M$ posiada otoczenie $U$, na którym można wybrać pola wektorowe $X_1, \dots, X_n$ ($n = \dim M$) liniowo niezależne i dodatnio zorientowane w każdym punkcie $y \in U$. Każda rozmaitość spójna posiada co najwyżej dwie orientacje. Rozmaitość $M$ jest *orientowalna*, gdy posiada orientację.

Z powyższej definicji wynika, że rozmaitość $M$ jest orientowalna wtedy, gdy istnieje jej pokrycie otwarte $\mathcal{U}$ i pola wektorowe $X_1^U, \dots X_n^U$ ($U \in \mathcal{U}$) na $U$ liniowo niezależne w każdym punkcie zbioru $U$ i takie, że

$$X_i^U = \sum_j f_{ij}X_j^V \quad \text{i} \quad \det[f_{ij}] > 0$$

na $U \cap V$ ($U, V \in \mathcal{U}$). Równoważnie, co łatwo pokazać, $M$ jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje na $M$ atlas $\mathcal{A}$ *zorientowany* tzn. taki, że

$$\det\left[\frac{\partial\phi_i}{\partial\psi_j}\right] > 0, \tag{2.9.2}$$

gdy mapy $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ i $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ należą do $\mathcal{A}$ i ich dziedziny się przecinają. Można przy tym założyć, że dziedziny map z $\mathcal{A}$ tworzą pokrycie lokalnie skończone oraz, że istnieje gładki rozkład jedności $\{f_\phi; \phi \in \mathcal{A}\}$ taki, że $\operatorname{supp} f_\phi \subset D_\phi$ dla każdej mapy $\phi \in \mathcal{A}$. Wtedy wzór

$$\Omega(x) = \sum_{\phi \in \mathcal{A}} f_\phi(x) \cdot d\phi_1(x) \wedge \cdots \wedge d\phi_n(x), \quad x \in M, \tag{2.9.3}$$

określa nigdzie nieznikającą $n$-formę $\Omega$ na $M$. Odwrotnie, jeśli $\Omega$ jst taką formą to warunek

$$\Omega(x)(v_1, \ldots, v_n) > 0, v_j \in T_x M.$$

określa orientację przestrzeni $T_x M$, która zależy w ciągły sposób od $x$. Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 2.9.2** *Rozmaitość n-wymiarowa M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje na M n-forma nigdzie nieznikająca.* $\square$

**Ćwiczenie 2.9.3** Wykaż, że podrozmaitość $N$ rozmaitości orientowalnej $M$, $\dim N = \dim M - 1$, jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje na $N$ ciągłe pole transwersalne do $N$, tj. takie odwzorowanie ciągłe $X : N \to TM$, że

$$X(x) \in T_x M \setminus T_x N$$

dla każdego $x \in M$. Wywnioskuj stąd, że

(i) zarówno sfera $S^n(r)$ jak i wykres dowolnej funkcji gładkiej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są orientowalnymi podrozmaitościami przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$,

(ii) *wstęga Möbiusa* określona jako obraz przekształcenia $f : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = (\cos u - \sin u \sin \frac{u}{2} v, \sin u + \cos u \sin \frac{u}{2} v, \cos \frac{u}{2} v)$, jest nieorientowalna.

Jeżeli $M$ jest rozmaitością z brzegiem, to każda orientacja $M$ wyznacza orientację brzegu $\partial M$ w następujący sposób: niech $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : U \to \mathbb{R}^n_+$ będzie dodatnio zorientowaną mapą w otoczeniu $U$ punktu brzegowego $x$ i niech $\tilde{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_{n-1})|U \cap \phi^{-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Jeżeli $\psi = (\psi_1 \ldots, \psi_n)$ jest inną dodatnio zorientowaną mapą określoną w otoczeniu $V$ punktu $x$, to

$$\det \left[ \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \tilde{\phi}_j}(y); i, j \leqslant n-1 \right] \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial \phi_n}(y) = \det \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_j}(y); i, j \leqslant n \right] > 0$$

i, ponieważ $(\psi_n \circ \phi^{-1})(y) = 0$ oraz $(\psi_n \circ \phi^{-1})(\{y\} \times \mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, więc $(\partial \psi_n / \partial \phi_n)(y) > 0$ dla dowolnego $y \in U \cap V \cap \partial M$. Zatem, wszystkie mapy $\tilde{\phi}$, gdzie $\phi$ przebiega dodatnio zorientowany atlas na $M$, tworzą dodatnio zorientowany atlas na $\partial M$. Gdy $n = \dim M$ jest parzyste (odp., nieparzyste), to orientację wyznaczoną przez ten atlas (odp., orientację do niej przeciwną) nazywamy *orientacją indukowaną* na $\partial M$. Na przykład, jeżeli $M$ jest ograniczonym krzywą $\Gamma$ obszarem płaskim z naturalną orientacją wyznaczoną przez bazę $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, to orientacja indukowana na $\Gamma$ wyznacza "obieg przeciwny do ruchu wskazówek zegara", tj. taki, że obszar $M$ leży "po lewej stronie" punktu poruszającego się po $\Gamma$ w kierunku dodatnim.

### 2.9.3 Różniczkowanie zewnętrzne

Dla dowolnej $r$-formy $\omega$ i dowolnych pól wektorowych $X_1, \ldots, X_{r+1}$ na rozmaitości $M$ przyjmijmy

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j+1} X_j(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1})) \tag{2.9.4}$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}), \tag{2.9.5}$$

gdzie "daszek" nad sybolem pola wektorowego oznacza, że zostało ono usunięte z ciągu argumentów. Łatwo sprawdzić, że $d\omega$ jest funkcją wieloliniową (nad $\mathrm{C}^\infty(M)$) i skośnie symetryczną, jest więc $(r+1)$-formą na $M$. Nazywamy ją *pochodną zewnętrzną* formy $\omega$, a samo odwzorowanie $d : \lambda^* M \to \lambda^* M$ — *różniczkowaniem zewnętrznym.*

**Twierdzenie 2.9.4** *Jeżeli $U$ jest dziedziną mapy $\phi$ na $M$ i $r$-forma $\omega$ jest dana na $U$ wzorem (2.9.1), to*

$$d\omega = \sum_{j_0, j_1, \ldots, j_r} (-1)^{j_0} \frac{\partial f_{j_1, \ldots, j_r}}{\partial \phi_{j_0}} d\phi_{j_0} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{j_r} \tag{2.9.6}$$

*na $U$.*

*Dowód.* Wystarczy sprawdzić, że wzory (2.9.4) i (2.9.6) dają te same wartoći formy $d\omega$ na polach $X_i = (\partial/\partial\phi_{k_i})$, gdzie $1 \leqslant k_1, \ldots, k_{r+1} \leqslant m$, co jest łatwe (i pozostawione Czytelnikowi) wobec komutowania pól tej postaci ($[X_i, X_j] = 0$ dla wszystkich $i, j$) oraz określenia różniczek $d\phi_j$ ($d\phi_j(X_i) = \delta_{i,j}$). □

**Wniosek 2.9.5** *$d \circ d = 0$.*

*Dowód.* Powyższa równość wynika bezpośrednio ze wzoru (2.9.6) i komutowania pól $\partial/\partial\phi_j$, $j = 1, \ldots, n$. □

Z powyższego wniosku wynika, że dla dowolnego $k$, przestrzeń $Z^k(M)$ tzw. *$k$-form zamkniętych* (tj., $k$-form $\omega$, dla których $d\omega = 0$) zawiera podprzestrzeń $B^k(M)$ tzw. *$k$-form dokładnych* (tj. form postaci $d\omega$, gdzie $\omega$ jest $(k-1)$-formą). Przestrzenie ilorazowe

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$$

nazywa się *grupami kohomologii de Rhama* rozmaitości $M$. Są one skończonego wymiaru i zależą tylko od topologii rozmaitości $M$: jeśli dwie rozmaitości są homeomorficzne, to ich kohomologie de Rhama są izomorficzne. Jak zobaczymy później, grupy te są izomorficzne z grupami kohomologii singularnych o współczynnikach rzeczywistych.

Odnotujmy na koniec, że pochodna Liego dla form zewnętrznych jest związana z operatorem różniczkowania zewnętrznego wzorem

$$\mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d\iota_X\omega, \tag{2.9.7}$$

gdzie $\iota_X$ jest operatorem "podstawiania" określonym w paragrafie 2.9.1. W szczególności,

$$\mathcal{L}_X f = \iota_X df \quad \text{i} \quad \mathcal{L}_X\Omega = d\iota_X\Omega, \tag{2.9.8}$$

gdzy $f$ jest funkcją (0-formą), zaś $\Omega$ $n$-formą (z $n = \dim M$) na $M$.

**Ćwiczenie 2.9.6** Korzystając z ćwiczenia 2.8.3 i wzoru (2.9.4) wyprowadź wzór (2.9.7).

### 2.9.4 Całkowanie form różniczkowych

Niech $M$ beędzie rozmaitością gładką, $m = \dim M$. *Sympleksem $k$-wymiarowym* na $M$ nazywamy dowolne odwzorowanie gładkie $s : \Delta_k \to M$, gdzie

$$\Delta_k = \{(t_0, t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1}; t_i \geqslant 0, \sum_i t_i = 1\}$$

jest standardowym sympleksem $k$-wymiarowym. Gładkość $s$ oznacza tu, że $s$ można przedłużyć do odwzorowania gładkiego określonego na pewnym otwartym otoczeniu zbioru $\Delta_k$. *Łańcuchem $k$- wymiarowym* na $M$ nazywamy dowolną skończoną sumę formalną postaci

$$c = \sum_i a_i s_i,$$

gdzie $a_i \in \mathbb{R}$, zaś $s_i$ są sympleksami $k$-wymiarowymi. Innymi słowy, $c$ jest kombinacją liniową skończonej liczby sympleksów w przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$ rozpiętej na zbiorze wszystkich $k$-wymiarowych sympleksów na $M$.

Jeżeli $\omega$ jest $k$-formą na $M$, a $c = \sum_i a_i s_i$ jest łańcuchem $k$-wymiarowym, to *całkę* $\int_c \omega$ określamy wzorem

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta_k} f_i d\lambda_k, \tag{2.9.9}$$

gdzie $\lambda_k$ jest $k$-wymiarową miarą Lebesgue'a na hiperpłaszczyźnie $H : \sum_i t_1 = 1$, zaś $f_i : \Delta_k \to \mathbb{R}$ funkcjami takimi, że $s_i^*\omega = f_i \cdot p_j^*(du_1 \wedge \cdots \wedge du_k)$ dla kanonicznej projekcji $p_j : H \to \mathbb{R}^k$, $p_j(t_0, t_1, \ldots, f_k) = (t_0, t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_k)$, i pewnego

$j \in \{0, 1, \dots, k\}$. (Całka ta nie zależy od wyboru indeksu $j$, bo złożenia $p_j \circ (p_l|H)^{-1}$ są izometriami dla dowolnych $j$ i $l$.

Jak wpomnielismy powyżej, zbiór $C_k(M)$ łańcuchów $k$-wymiarowych na $M$ posiada naturalną strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$. Całkowanie form różniczkowych jest przekształceniem dwuliniowym produktu $C_k(M) \times \Lambda^k(M)$ w $\mathbb{R}$:

$$\int_{ac+a'c'} \omega = a \int_c \omega + a' \int_{c'} \omega \quad \text{oraz} \quad \int_c (a\omega + a'\omega') = a \int_c \omega a' \int_c \omega'$$

dla dowolnych $a, a' \in \mathbb{R}$, $c, c' \in C_k(M)$ i $\omega, \omega' \in \Lambda^k(M)$.

*Brzegiem* sympleksu $k$-wymiarowego $s$ ($k > 0$) jest $(k-1)$-wymiarowy łańcuch $\partial s$ określony wzorem

$$\partial s = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j s|S_j, \tag{2.9.10}$$

gdzie

$$S_j = \{(t_0, \dots, t_k) \in \Delta_k; t_j = 0\}$$

jest $(k-1)$-wymiarową *ścianą* sympleksu $\Delta_k$. Brzegiem symplesku 0-wymiarowego jest łańcuch zerowy. (Każdy zbiór $S_j$ jest kanonicznie utożsamiany z $\Delta_{k-1}$ poprzez odzworowanie $(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1} \dots t_k) \mapsto (t_0, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_k)$.) Brzeg dowolnego łańcucha $c = \sum_i a_i s_i$ określa się wzorem

$$\partial c = \sum_i a_i \partial s_i.$$

Określone w ten sposób przekształcenie $\partial$, $\partial : C_k(M) \to C_{k-1}(M)$, jest liniowe.

**Lemat 2.9.7** $\partial^2 = 0$.

*Dowód.* Jeśli $k > 1$ i $s$ jest sympleksem $k$-wymiarowym, to

$$\partial\partial s = \sum_{i=0}^{i} (-1)^i \partial(s|S_i) = \sum_{i=0}^{i} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{i+j} s|(S_i)_j = 0$$

ponieważ — zgodnie z przyjętą konwencją — $(S_i)_j = (S_j)_{i-1}$, gdy $i \geqslant j$ oraz $(S_i)_j = (S_{j+1})_i$, gdy $i < j$. Równość $\partial\partial c = 0$ dla dowolnego łańcucha $c$ wynika od razu z powyższej i z liniowości przekształcenia $\partial$. □

Z powyższego lematu wynika, że przestrzeń $B_k(M)$ *brzegów*, tj. obraz przekształcenia $\partial : C_{k+1}(M) \to C_k(M)$, jest podprzestrzenią przestrzeni $Z_k(M)$ *cykli*, tj. jądra przekształcenia $\partial : C_k(M) \to C_{k-1}M$. Przestrzeń ilorazową

$$H_k(M) = Z_k(M)/B_k(M)$$

nazywa się $k$-tą *grupą homologii* (singularnych, o współczynnikach rzeczywistych) rozmaitości $M$. (Podobną konstrukcję przeprowadza się dla dowolnych przestrzeni topologicznych zastępując przekształcenia gładkie na $\Delta_k$ przekształceniami ciągłymi.)

**Twierdzenie 2.9.8** (Stokes) *Dla dowolnej $(k-1)$-formy $\omega$ i dowolnego łańcucha $c$ wymiaru $k$ zachodzi równość*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega . \Box \tag{2.9.11}$$

*Dowód.* Ze względu na liniowość obu stron dowodzonej równości wystarczy przeprowadzić dowód dla pojedynczego sympleksu $s$.

Niech więc $\omega$ będzie dowolną $(k-1)$-formą na $M$. Istnieją funkcje $f_1, \dots f_k : \Delta_k \to \mathbb{R}$ takie, że

$$s^*\omega = \sum_{i=1}^{k} f_i p_0^*(dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{i-1} \wedge dt_{i+1} \wedge \cdots \wedge dt_k).$$

Wtedy

$$(s|S_j)^*\omega = f_j|S_j \cdot p_0^*(dt_1 \wedge \dots dt_{j-1} \wedge dt_{j+1} \wedge \cdots \wedge dt_k,$$

$$\int_{\partial s} \omega = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \int_{\Delta_{k-1}} f_j|S_j d\lambda_{k-1},$$

$$s^* d\omega = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial t_i} p_0^*(dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k)$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_s d\omega &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \int\!\!\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t_i} \left( \int_{\Delta_{k-1}} f_i(*, t_i, *) d\lambda_{k-1} \right) dt_i \\ &= - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \int_{\Delta_{k-1}} f_i|S_i, \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\Box$

Podobnie, jeżeli rozmaitość $M$ jest orientowalna, $A$ jest podzbiorem borelowskim $M$ i $\omega$ jest $m$-formą ($m = \dim M$) na $M$, to całka $\int_A \omega$ jest określona wzorem

$$\int_A \omega = \sum_{i \in I} \int_{\phi_i(A)} f_i d\lambda_m, \tag{2.9.12}$$

gdzie $\{\phi_i; i \in I\}$ jest dotatnio zorientowanym lokalnie skończonym atlasem na $M$, zaś $f_i$ funkcjami takimi, że

$$(\phi_i^{-1})^*(h_i\omega) = f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

dla pewnego rozkładu jedności $h_i; i \in I$ na $M$ takiego, że $\operatorname{supp} h_i \subset D_{\phi_i}$. Z klasycznego twierdzenia o zamianie zmiennych dla całki Lebesgue'a wynika, że określenie to jest poprawne: jeżeli $\phi$ i $\psi$ są mapami określonymi na tym samym zbiorze otwartym $U$, $\omega$ jest $m$-formą o nośniku zawartym w $U$, $(\phi^{-1})^*\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ i $(\psi^{-1})^*\omega = g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$, to

$$g = f \circ \phi \circ \psi^{-1} \cdot \det\left(\frac{\partial(\phi_j \circ \psi^{-1})}{\partial x_k}, j, k \leqslant m\right)$$

i

$$\int_{\psi(A)} g d\lambda_m = \int_{\phi(A)} f d\lambda_m.$$

Oczywiście przyporządkowanie

$$\omega \mapsto \int_A \omega$$

jest — dla każdego zbioru borelowskiego $A$ — funkcjonałem liniowym na przestrzeni $m$-form oraz

$$\int_{A\cup B} \omega = \int_A \omega + \int_B \omega,$$

gdy zbiory borelowskie $A$ i $B$ są rozłączne.

Analogicznie do Twierdzenia 2.9.8 mamy teraz

**Twierdzenie 2.9.9** (Stokes) *Jeśli $M$ jest zwartą i zorientowaną rozmaitością z brzegiem $\partial M$ wyposażonym w orientację indukowaną z $M$, to dla dowolnej $(m-1)$-formy ($m = \dim M$) $\omega$ na $M$ zachodzi równość*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^*\omega, \tag{2.9.13}$$

*gdzie $\iota : \partial M \to M$ jest naturalnym włożeniem.*

*Dowód.* Wystarczy przeprowadzić dowód dla form $\omega$ o nośniku zawartym w dziedzinie $D_\phi$ pewnej dodatnio zorientowanej mapy $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ na $M$.

Niech

$$\omega = \sum_{j=1}^m f_j d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_{j-1} \wedge d\phi_{j+1} \wedge \cdots \wedge d\phi_m$$

na $D_\phi$. Wtedy

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\frac{\partial f_j}{\partial \phi_j}\right)\cdot d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_m.$$

Jeśli $D_\phi \cap \partial M = \emptyset$ i $\phi(D_\phi)$ jest kostką otwartą $B = (-1,1)^m$ (takie założenie nie zmniejsza ogólności rozważań), to

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\int_B \frac{\partial(f_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_j} d\lambda_m$$

i - na podstawie klasycznego twierdzenia Fubiniego -

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\frac{\partial(f_j\circ\phi^{-1})}{\partial x_j}dx_j dx_1 \ldots dx_{j-1}dx_{j+1}\ldots dx_m = 0$$

ponieważ $f_j \equiv 0$ w pewnym otoczeniu brzegu kostki $B$. Z drugiej strony,

$$\int_{\partial M}\iota^*\omega = 0,$$

ponieważ $\operatorname{supp}\omega \cap \partial M = \emptyset$, a więc $\iota^*\omega \equiv 0$. Zatem, równość (2.9.13) jest spełniona w tym przypadku.

Jeśli $\phi : D_\phi \to B_{m-1}\times[0,)$ jest mapą w otoczeniu punktu brzegowego $x_0$, to $\phi_m \circ \iota \equiv 0$, a zatem

$$\iota^*\omega = f_m d(\phi_1\circ\iota)\wedge\cdots\wedge d(\phi_{m-1}\circ\iota$$

i całka z formy $\iota^*\omega$ po brzegu $\partial M$ wyposażonym w orientację indukowaną z $M$ wynosi

$$\int_{\partial M}\iota^*\omega = (-1)^m\int_{B_{m-1}}(f_m\circ\phi^{-1})(*,0)d\lambda_{m-1}.$$

Z drugiej strony, podobnie jak w przypadku poprzednim,

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\int_B\frac{\partial(f_j\circ\phi^{-1})}{\partial x_j}d\lambda_m \\ &= (-1)^{m+1}\int_{B_{m-1}}\int_0^1\frac{\partial(f_m\circ\phi^{-1})}{\partial x_m}dx_m d\lambda_{m-1} = (-1)^m\int_{B_{m-1}}(f_n\circ\phi^{-1})(*,0)d\lambda_{m-1}\end{aligned}$$

i równość (2.9.13) jest spełniona również w tym przypadku. □

**Ćwiczenie 2.9.10** Zinterpretuj klasyczne wzory Stokesa (dla powierzchni w $\mathbb{R}^3$), Greena i Gaussa - Ostrogradskiego (por. np. [**Le**] lub [**Si**]) jako szczególne przypadki wzoru (2.9.13).

## 2.10 Koneksje liniowe I

### 2.10.1 Pochodna kowariantna

**Definicja 2.10.1** *Pochodną kowariantną* lub *koneksją* na rozmaitości $M$ nazywamy odwzorowanie $\nabla$, które każdym dwu polom wektorowym $X$ i $Y$ na $M$ przyporządkowuje pole wektorowe $\nabla_X Y$, przy czym spełnione są następujące warunki:

(i) $\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$,

(ii) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$,

(iii) $\nabla_X (fY) = Xf \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$,

gdzie $X, X_1, X_2, Y, Y_1$ i $Y_2$ są polami wektorowymi, zaś $f, f_1$ i $f_2$ - funkcjami gładkimi na $M$.

Warunek (i) implikuje równość

$$\nabla_{X_1} Y(x) = \nabla_{X_2} Y(x),$$

dla dowolnych pól $X_1$ i $X_2$ takich, że $X_1(x) = X_2(x)$ $(x \in M)$, z której wynika od razu, że poprawne jest następujące określenie pochodnej kowariantnej pola $Y$ w kierunku wektora $v \in T_x M$:

$$\nabla_x Y = \nabla_X Y(x),$$

gdzie $X$ jest dowolnym polem wektorowym na $M$ takim, że $X(x) = v$.

Najprostszym przykładem pochodnej kowariantnej jest zwykła pochodna kierunkowa $D$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$: jeśli $X$ i $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ są polami wektorowymi na $\mathbb{R}^n$, to

$$D_X Y = (X(Y_1), \ldots, X(Y_n)).$$

Ogólnie, każda pochodna kowariantna $\nabla$ na $\mathbb{R}^n$ jest wyznaczona jednoznacznie przez funkcje $\Gamma_{ij}^k$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, wyznaczone z równości

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k,$$

gdzie $E_k = (\delta_{1k}, \ldots, \delta_{nk})$ są bazowymi polami wektorowymi na $\mathbb{R}^n$. Podobna uwaga dotyczy pochodnych kowariantmych na dowolnej rozmaitości $M$: jeśli $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ jest mapą określoną na zbiorze otwartym $U$, to wartości pochodnej kowariantnej $\nabla$ w punktach zbioru $U$ są wyznaczone przez funkcje $\Gamma_{ij}^k$ takie, że

$$\nabla_{(\partial/\partial\phi_i)}(\partial/\partial\phi_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial\phi_k}.$$

Funkcje $\Gamma_{ij}^k$ nazywa się *współrzędnymi pochodnej kowariantnej* $\nabla$ w mapie $\phi$ (lub, *symbolami Christoffela drugiego rodzaju*).

**Ćwiczenie 2.10.2** Wyznacz zależności między współrzędnymi pochodnej kowariantnej $\nabla$ w dwu różnych mapach $\phi$ i $\psi$ określonych na tym samym zbiorze otwartym $U \subset M$.

Różniczkowanie kowariantne pól wektorowych rozszerza się jednoznacznie do różniczkowania dowolnych pól tensorowych w taki sposób, że $\nabla_X$ zachowuje typ tensorów oraz

(iv) $\nabla_X f = Xf$,

(v) $\nabla_X(S + T) = \nabla_X S + \nabla_X T$,

(vi) $\nabla_X(CT) = C(\nabla_X T)$ oraz

(vi) $\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T$

dla dowolnych pól tensorowych $S$ i $T$, dowolnej funkcji gładkiej $f$ i dowolnej (możliwej do wykonania) kontrakcji $C$. Przyporządkowanie

$$X \mapsto \nabla_X T$$

jest polem tensorowym typu $(r, s+1)$, gdy $T$ jest polem typu $(r, s)$. Oznaczamy je symbolem $\nabla T$.

Z powyższych warunków wynika np., że jeżeli $\omega$ jest 1-formą, a $X$ i $Y$ są dowolnymi polami wektorowymi, to

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) &= \nabla_X(C(Y \otimes \omega)) = C(\nabla_X(Y \otimes \omega) \\ &= C(\nabla_X Y \otimes \omega + Y \otimes \nabla_X \omega) = \omega(\nabla_X Y) + \nabla_X \omega(Y), \end{aligned}$$

gdzie $C$ jest — jedyną możliwą do wykonania — kontrakcją. Innymi słowy, 1-forma $\nabla_X \omega$ dana jest wzorem

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y). \tag{2.10.1}$$

Z warunków (iv) - (vii) można otrzymać podobne wzory wyrażające pochodne kowariantne dowolnych pól tensorowych typu $(r, s)$, gdzie $r = 0$ lub $r = 1$.

**Ćwiczenie 2.10.3** (i) Wykaż, że jeżeli $T$ jest polem tensorowym typu $(r, s)$, zaś $X, Y_1, \ldots, Y_s$ są polami wektorowymi, to

$$(\nabla_X T)(Y_1, \ldots, Y_s) = X(T(Y_1, \ldots, Y_s)) - \sum_{i=1}^{s} T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_s), \tag{2.10.2}$$

gdy $r = 0$ oraz

$$(\nabla_X T)(Y_1, \ldots, Y_s) = \nabla_X(T(Y_1, \ldots, Y_s)) - \sum_{i=1}^{s} T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_s), \quad (2.10.3)$$

gdy $r = 1$. (ii) Wyznacz współrzędne pola tensorowego $\nabla T$ poprzez współrzędne pola $T$ i współrzędne pochodnej $\nabla$ w dowolnej mapie $\phi$ na rozmaitości $M$.

Podobnie jak w przypadku pól wektorowych pochodna kowariantna dowolnego pola tensorowego $T$ w kierunku pojedynczego wektora $v \in T_x M$ jest określona poprawnie wzorem

$$\nabla_v T = \nabla_X T(x),$$

gdzie $X$ jest takim polem wektorowym na $M$, że $X(x) = v$.

Niech $F : M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. *Polem tensorowym* (typu $(r, s)$) *wzdłuż* $F$ nazywamy odwzorowanie gładkie $S : M \to T^{(r,s)}N$, które każdemu punktowi $x \in M$ przyporządkowuje tensor $S(x) \in T^{(r,s)}_{F(x)}N$. W szczególności, *pole wektorowe* $X$ *wzdłuż* $F$ przyporządkowuje każdemu $x \in M$ wektor $X(x) \in T_{F(x)}N$. Jeżeli $Y$ jest polem wektorowym na $N$, to $Y \circ F$ jest polem wektorowym wdłuż $F$. Podobnie, jeżeli $X$ jest polem wektorowym na $M$, to $dF \circ X$ jest polem wektorowym wzdłuż $F$.

Z przedstawionego powyżej opisu lokalnego pochodnej kowariantnej wynika łatwo, że pochodna kowariantna $\nabla$ na $N$ indukuje różniczkowanie pól wzdłuż dowolnego odwzorowania gładkiego $F : M \to N$ w taki sposób, że

$$\nabla_v(Y \circ F) = \nabla_{dF(v)} Y \quad (2.10.4)$$

dla dowolnego pola wektorowego $Y$ na $N$ i dowolnego $v \in TM$. Rzeczywiście, jeżeli pola wektorowe $Y_1, \ldots, Y_n$ są liniowo niezależne w każdym punkcie pewnego zbioru otwartego $U \subset N$, to dowolne pole wektorowe $X$ wzdłuż $F$ można na zbiorze $F^{-1}(U)$ przedstawić w postaci

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot Y_i \circ F,$$

gdzie $f_1, \ldots, f_n$ są funkcjami gładkimi na $F^{-1}(U)$; wtedy

$$\nabla_v X = \sum_{i=1}^{n} (v(f_i) \cdot Y_i(F(x)) + f_i(x) \cdot \nabla_v Y_i)$$

dla dowolnego $v \in T_x M$ z $x \in F^{-1}(U)$. Łatwo sprawdzić, że wartość pochodnej $\nabla_v X$ jest określona poprawnie, tj. nie zależy od wyboru pól $Y_j$. W szczególności, jeżeli

$\gamma : (a,b) \to N$ jest krzywą na $N$, i $Y$ jest polem wzdłuż $\gamma$, to $\nabla_{(d/dt)}Y$ jest polem wzdłuż $\gamma$, przy czym

$$\nabla(d/dt)(s)Y = \sum_{k=1}^{n} \left( Y_k'(s) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i'(s) Y_j(s) \Gamma_{ij}^k(\gamma(s)) \right) \frac{\partial}{\partial \phi_k}(\gamma(s)), \tag{2.10.5}$$

gdy $\gamma_i$, $Y_j$ i $\Gamma_{ij}^k$ są współrzędnymi krzywej $\gamma$, pola $Y$ i koneksji $\nabla$ w pewnej mapie $\phi$ na $N$ określonej w pewnym otoczeniu punktu $\gamma(s)$.

Podobnie jak poprzednio, różniczkowanie kowariantne pól wektorowych wzdłuż $F$ przedłuża się do różniczkowania pól tensorowych (dowolnego typu) wzdłuż $F$. Czytelnik z łatwością zmodyfikuje własności (i) - (vii) i wzory (2.10.2) i (2.10.3) tak, by zachodziły dla dowolnych pól wzdłuż odwzorowań gładkich.

### 2.10.2 Skręcenie i krzywizna

Z każdą pochodną kowariantną $\nabla$ na dowolnej rozmaitości $M$ związane są w naturalny sposób dwa pola tensorowe odzwierciedlające pewne jej własności geometryczne. I tak, *tensor skręcenia* $T$ jest polem typu $(1,2)$ określonym wzorem

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.10.6}$$

i stanowi pewną miarę nieprzemienności pochodnej kowariantnej. Z kolei, *tensor krzywizny* $R$ jest polem typu $(1,3)$ danym wzorem

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2.10.7}$$

Dla dowolnych pól wektorowych $X$ i $Y$, $R(X,Y)$ jest endomorfizmem modułu pól wektorowych na $M$ wyrażającym stopień nieprzemienności różniczkowań $\nabla_X$ i $\nabla_Y$.

Jeżeli $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ jest mapą na $M$ i $\Gamma_{ij}^k$ są współrzędnymi pochodnej $\nabla$ w tej mapie, to — jak łatwo sprawdzić — współrzędne $T_{ij}^k$ i $R_{ijk}^l$ pól $T$ i $R$ w tej samej mapie wyrażają się wzorami

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \tag{2.10.8}$$

i

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial \phi_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial \phi_j} + \sum_{m=1}^{n} \left( \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \right). \tag{2.10.9}$$

Zatem, tensor skręcenia pochodnej $\nabla$ znika tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy współrzędne pochodnej $\nabla$ są symetryczne względem dolnych wskaźników. Rola tensora krzywizny w geometrii jest znacznie głębsza i poznamy ją w dalszym ciągu wykładu.

**Ćwiczenie 2.10.4** Jeżeli $\nabla$ jest pochodną kowariantną na rozmaitości $M$, zaś $S$ dowolnym polem tensorowym typu $(1,2)$, to $\nabla'$ określone wzorem

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + S(X,Y)$$

jest nową pochodną kowariantną na $M$. Wyznacz tensory skręcenia i krzywizny pochodnej $\nabla'$ za pomocą $S$ oraz tesorów skręcenia i krzywizny pochodnej $\nabla$.

Korzystając z własności nawiasu Liego omówionych w paragrafie 2.7.3 oraz ze wzoru (2.10.3) można wyprowadzić następujące własności tensorów $T$ i $R$:

(i) $T(X,Y) = -T(Y,X)$ i $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

(ii) Jeżeli $\nabla$ jest pochodną bez skręcenia (tj. $T = 0$), to tensor $R$ spełnia tzw. *pierwszą tożsamość Bianchi* postaci

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0. \tag{2.10.10}$$

(iii) Jeżeli $T = 0$, to tensor $R$ spełnia tzw. *drugą tożsamość Bianchi* postaci

$$(\nabla_X R)(Y,Z,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,V) = 0. \tag{2.10.11}$$

**Ćwiczenie 2.10.5** Udowodnij tożsamości (2.10.10) i (2.10.11) i znajdź ich odpowiedniki dla pochodnych kowariantnych z niezerowym skręceniem.

Na koniec, jeżeli $F : N \to M$ jest odwzorowaniem gładkim, $X$ i $Y$ są polami wektorowymi na $M$, zaś $Z$ dowolnym polem wektorowym wzdłuż $F$, to spełnione są tzw. *równania strukturalne Cartana*

$$T(dF \circ X, dF \circ Y) = \nabla_X(dF \circ Y) - \nabla_Y(dF \circ F) - dF \circ [X,Y] \tag{2.10.12}$$

oraz

$$R(dF \circ X, dF \circ Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2.10.13}$$

Równania te można wyprowadzić przedstawiając pole $Z$ w postaci kombinacji pól postaci $Z_i \circ F$ oraz stosując wzór (2.10.3) definiujący pochodną kowariantną wzdłuż $F$ oraz wzory (2.10.6) i (2.10.7).

### 2.10.3 Przeniesienie równoległe

Niech $\nabla$ będzie pochodną kowariantną na rozmaitości $M$, zaś $\gamma : [a,b] \to M$ krzywą gładką. Pole wektorowe $X$ wzdłuż $\gamma$ nazywamy *równoległym*, gdy

$$\nabla_{d/dt} X = 0.$$

Z rówania (2.10.5) i teorii układów równań różniczkowych zwyczajnych wynika od razu, że dla każdego wektora $v \in T_{\gamma(a)}M$ istnieje dokładnie jedno pole $X_v$ wzdłuż $\gamma$, równoległe i takie, że $X_v(a) = v$. Oczywiście, pole zerowe jest równoległe i liniowa kombinacja (o stałych współczynnikach) pól równoległych jest polem równoległym. Wynika stąd od razu, że przyporządkowanie

$$\tau_\gamma : T_{\gamma(a)}M \ni v \mapsto X_v(b) \in T_{\gamma(b)}M \tag{2.10.14}$$

jest izomorfizmem przestrzeni stycznych. Nazywamy go *przeniesieniem równoległym* wzdłuż $\gamma$. Proste przykłady pokazują, że przeniesienia równoległe wzdłuż dwu różnych krzywych o tym samym początku i końcu są często różne.

Jeżeli $\gamma$ jest krzywą kawałkami gładką, tj. istnieje ciąg $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ taki, że $\gamma_i = \gamma|[t_i, t_{i+1}]$ jest krzywą gładką dla każdego $i = 0, \ldots, k-1$, to przeniesienie równoległe $\tau_\gamma$ określamy jako złożenie $\tau_{\gamma_{k-1}} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_0}$. Oczywiście, określenie takie jest poprawne, tj. $\tau_\gamma$ nie zależy od wyboru ciągu $(t_i)$, ponieważ bezpośrednio z określenia (2.10.14) wynika, iż

$$\tau_\delta = \tau_{\delta_1} \circ \tau_{\delta_2}, \tag{2.10.15}$$

gdy $\delta : [a, b] \to M$ jest krzywą gładką, $a < c < b$, $\delta_1 = \delta|[a, c]$ i $\delta_2 = \delta|[c, b]$. (Istotnie, pole $X$ wzdłuż $\delta$ jest równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy równoległe są pola $X|[a, c]$ (wzdłuż $\delta_1$) i $X|[c, b]$ (wzdłuż $\delta_2$).)

Z powyższych rozważań wynika, że zbiór $\mathcal{H}(x)$ wszystkich przekształceń liniowych $\tau_\gamma : T_xM \to T_xM$, gdzie $\gamma$ jest dowolną kawałkami gładką krzywą zamkniętą o początku i końcu $x$ jest grupą. Nazywamy ją *grupą holonomii* koneksji $\nabla$ w punkcie $x$. Jeżeli rozmaitość $M$ jest spójna, to grupy $\mathcal{H}(x)$ i $\mathcal{H}(y)$ są sprzężone dla dowolnych $x, y \in M$. Istotnie, jeżeli $\delta : [a, b] \to M$ jest krzywą łączącą $x$ z $y$ ($\delta(a) = x$ i $\delta(b) = y$), to przyporządkowanie

$$\mathcal{H}(x) \ni \tau_\gamma \mapsto \tau_\delta \circ \tau_\gamma \circ (\tau_\delta)^{-1} \in \mathcal{H}(y)$$

jest izomorfizmem grup holonomii.

Pokażemy teraz ważny związek przeniesienia równoległego z pochodną kowariantną i jej tensorem krzywizny.

Załóżmy najpierw, że $v \in T_xM$, $X \in \mathcal{X}(M)$, zaś $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ jest taką krzywą gładką, że $\gamma(0) = x$ i $\dot\gamma(0) = v$. Wtedy zachodzi następujące

**Twierdzenie 2.10.6** *Jeżeli $X^t$, $t \in (0, \varepsilon)$, są takimi polami równoległymi wzdłuż $\gamma$, że $X^t(t) = X(\gamma(t))$, to*

$$\nabla_v X = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left( X^t(0) - X(x) \right). \tag{2.10.16}$$

Zauważmy, że jeżeli $\gamma_t = \gamma|[0,t]$, to

$$X^t(0) = \tau_{\gamma_t}^{-1}(X(t)),$$

a więc równość (2.10.16) pokazuje jak wyznaczyć pochodną kowariantną $\nabla$ poprzez pochodzące od niej operacje pezeniesienia równoległego.

*Dowód.* Jeżeli $E_1, \ldots E_n$ ($n = \dim M$) są liniowo niezależnymi (nad $\mathbb{R}$) polami równoległymi wzdłuż $\gamma$, to $X \circ \gamma = \sum_j f_j E_j$, gdzie $f_j$ są rzeczywistymi funkcjami gładkimi na przedziale $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Wtedy

$$X(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(0)E_j(0), \quad X^t = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)E_j \quad \text{oraz} \quad X^t(0) = \sum_{j=1}^{t} f_j(t)E_j(0).$$

Zatem

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(X^t(0) - X(x)\big) = \sum_{j=1}^{n} f_j'(0)E_j(0) = \nabla_{d/dt(0)}(X \circ \gamma) = \nabla_v X.$$

□

Weźmy teraz trzy wektory $u, v, w \in T_xM$ oraz odwzorowanie gładkie $F : (-\varepsilon, \varepsilon)\times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (s,t) \mapsto F(s,t) \in M$ takie, że $F(0,0) = x$, $dF((d/ds)(0)) = u$ i $dF((d/dt)(0)) = v$. Dla dowolnych $s$ i $t \in (0, \varepsilon)$ oznaczmy przez $w_{s,t}$ obraz wektora $w$ w przeniesiemiu równoległym wzdłuż krzywej $F \circ \gamma_{s,t}$, gdzie $\gamma_{s,t}$ jest prostokątem o bokach $\beta_{0,t}$, $\alpha_{s,t}$, $\beta_{s,t}$ i $\alpha_{s,0}$, zaś $\alpha_{s,t}$ i $\beta_{s,t}$ oznaczają odpowiednio odcinki na pł aszczyźnie $\mathbb{R}^2$ łączące odpowiednio punkty $(0,t)$ z $(s,t)$ i $(s,0)$ z $(s,t)$. (Czytelnik zauważy bez trudu, że odcinki te trzeba odpowiednio zorientować tak, by $\gamma_{s,t}$ była krzywą zamkniętą !) Innymi słowy,

$$w_{s,t} = (\tau_{F\circ\alpha_{s,0}}^{-1} \circ \tau_{F\circ\beta_{s,t}}^{-1} \circ \tau_{F\circ\alpha_{s,t}} \circ \tau_{F\circ\beta_{0,t}})(w).$$

Przy tych oznaczeniach zachodzi następujące

**Twierdzenie 2.10.7** *Dla dowolnych wektorów $u, v, w \in T_xM$ spełniona jest równość*

$$R(u,v)w = im_{s,t\to 0}\frac{1}{st}(w_{s,t} - w), \tag{2.10.17}$$

*gdzie $s$ i $t$ dążą do zera jednocześnie i w taki sposób, że ilorazy $s/t$ i $t/s$ pozostają ograniczone.*

*Dowód.* Określmy pole $X$ wzdłuż $F$ wzorem

$$X(s,t) = \tau_{F\circ\alpha_{s,t}} \circ \tau_{F\circ\beta_{0,t}}(w).$$

Ponieważ $[d/ds, d/dt] = 0$, więc

$$R(u,v)w = \left(\nabla_{d/ds}\nabla_{d/dt}X - \nabla_{d/dt}\nabla_{d/ds}X\right)(0,0).$$

Z poprzedniego twierdzenia wynika, że

$$\nabla_{d/dt}X(s,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\tau^{-1}_{F\circ\beta_{s,t}}(X(s,t)) - X(s,0)\right)$$

oraz

$$\begin{aligned}\nabla_{d/ds}\nabla_{d/dt}X(0,0) = \lim_{s,t\to 0}\frac{1}{st}(&\tau^{-1}_{F\circ\alpha_{s,0}}\circ\tau^{-1}_{F\circ\beta_{s,t}}(X(s,t)) \\ &- \tau^{-1}_{F\circ\alpha_{s,0}}(X(s,0)) - \tau^{-1}_{F\circ\beta_{0,t}}(X(0,t)) - X(0,0)).\end{aligned}$$

Podobnie,

$$\begin{aligned}\nabla_{d/dt}\nabla_{d/ds}X(0,0) = \lim_{s,t\to 0}\frac{1}{st}(&\tau^{-1}_{F\circ\beta_{0,t}}\circ\tau^{-1}_{F\circ\alpha_{s,t}}(X(s,t)) \\ &- \tau^{-1}_{F\circ\alpha_{s,0}}(X(s,0)) - \tau^{-1}_{F\circ\beta_{0,t}}(X(0,t)) - X(0,0)).\end{aligned}$$

Zestawiając powyższe wzory otrzymujemy równość

$$R(u,v)w = \lim_{s,t\to 0}\frac{1}{st}(\tau^{-1}_{F\circ\alpha_{s,0}}\circ\tau^{-1}_{F\circ\beta_{s,t}}(X(s,t)) - \tau^{-1}_{F\circ\beta_{0,t}}\circ\tau^{-1}_{F\circ\alpha_{s,t}}(X(s,t)))$$

równoważną, wobec określenia pola $X$, równości (2.10.17). □

### 2.10.4 Geodezyjne

Przypomnijmy, że dla dowolnej krzywej gładkiej $\gamma$ odwzorowanie $\dot\gamma : t \mapsto \dot\gamma(t)$ jest polem wektorowym wzdłuż krzywej $\gamma$, można więc określić pochodną $\nabla_{d/dt}\dot\gamma$.

**Definicja 2.10.8** Krzywą gładką $\gamma : (a,b) \to M$ na rozmaitości $M$ z koneksją $\nabla$ nazywamy *geodezyjną*, gdy

$$\nabla_{d/dt}\dot\gamma = 0. \tag{2.10.18}$$

Innymi słowy, $\gamma$ jest geodezyjną, gdy $\dot\gamma$ jest polem równoległym (wzdłuż $\gamma$).

Przedstawiając krzywą $\gamma$ w mapie $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ na $M$ jako układ funkcji $\gamma_j = \phi_j \circ \gamma$ stwierdzamy łatwo, że

$$\dot\gamma = \sum_{j=1}^{n}\gamma'_j \cdot \frac{\partial}{\partial\phi_j}\circ\gamma,$$

że zatem równanie (2.10.18) jest — wobec równości (2.10.5) — równoważne następującemu układowi równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu:

$$\gamma_k''(s) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i'(s)\gamma_j'(s)\Gamma_{ij}^k(\gamma(s)), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.10.19}$$

Zatem, z teorii równań różniczkowych zwyczajnych wynika od razu następujące

**Twierdzenie 2.10.9** *Jeżeli $\nabla$ jest pochodną kowariantną na $M$, to dla dowolnego punktu $x \in M$ i wektora $v \in T_xM$ istnieje przedział otwarty $J \subset \mathbb{R}$ i geodezyjna $\gamma : J \to M$ taka, że $0 \in J$, $\gamma(0) = x$ i $\dot\gamma(0) = v$. Jeżeli $\gamma_1 : J_1 \to M$ i $\gamma_2 : J_2 \to M$ są dwoma takimi geodezyjnymi ($0 \in J_1 \cap J_2$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$, $\dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0) = v$), to $\gamma_1 = \gamma_2$ na $J_1 \cap J_2$. Zatem, dla dowolnego $x \in M$ i $v \in T_xM$ istnieje dokładnie jedna maksymalna (co do dziedziny) geodezyjna $\gamma_v : J_v \to M$ spełniająca nasze warunki początkowe ($\gamma_v(0) = x$ i $\dot\gamma_v(0) = v$). Co więcej, dla dowolnego wektora $v \in TM$ istnieje jego otoczenie $W$ otwarte w $TM$ i przedział $J$ otwarty w $\mathbb{R}$, zawierający zero i taki, że $J \subset J_w$ dla wszystkich wektorów $w \in W$. Przy tym, odzworowanie*

$$J \times W \ni (t, w) \mapsto \gamma_w(t) \in M \tag{2.10.20}$$

*jest gładkie.* □

**Ćwiczenie 2.10.10** Przy oznaczeniach z powyższego twierdzenia wykaż, że

(1) jeśli $v \in TM$ i $s > 0$, to $J_{sv} = \frac{1}{s} \cdot J_v = \{(t/s); t \in J_v\}$ oraz $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$ dla wszystkich $t \in J_{sv}$,

(2) jeśli $v \in TM$, $s \in J_v$ i $w = \dot\gamma_v(s)$, to $J_w = J_v - s = \{t - s; t \in J_v\}$ i $\gamma_w(t) = \gamma_v(t + s)$ dla wszystkich $t \in J_w$.

### 2.10.5 Odwzorowanie wykładnicze

Twierdzenie 2.10.9 i ćwiczenie 2.10.10 pokazują, że jeśli $\nabla$ jest pochodną kowariantną na $M$, to zbiór $W$ wszystkich wektorów $v \in TM$, dla których $1 \in J_v$ jest otoczeniem otwartym przekroju zerowego $(TM)_0 = \{0_x \in T_xM; x \in M\}$.

**Definicja 2.10.11** Odwzorowanie $\exp : W \to M$ dane wzorem

$$\exp(v) = \gamma_v(1) \tag{2.10.21}$$

nazywamy *odwzorowaniem wykładniczym* koneksji $\nabla$. Przyjmujemy też oznaczenie $\exp_x = \exp|W \cap T_xM$.

Oczywiście, $W_x = W \cap T_xM$ jest otoczeniem otwartym wektora zerowego $0_x \in T_xM$, $\exp_x(0_x) = x$, a odwzorowania exp i $\exp_x$ są gładkie. Bezpośrednio z określenia wynika, że różniczka $(\exp_x)_{*0_x}$ odwzorowania $\exp_x$ w punkcie $0_x \in T_xM$ pokrywa się z omówionym w paragrafie 2.3 kanonicznym izomorfizmem $\iota$ przestrzeni $T_xM$ i $T_{0_x}(T_xM)$. Istnieje zatem otoczenie $U_x \subset W_x$ wektora zerowego $0_x$ otwarte w $T_xM$ i takie, że $\exp_x$ przekształca $V_x$ dyfeomorficznie na pewne otoczenie otwarte $U_x \subset M$ punktu $x \in M$.

### 2.10.6 Wektory poziome

Niech tak jak poprzednio $M$ będzie rozmaitością z pochodną kowariantną $\nabla$. Oznaczmy przez $\pi$ naturalne rzutowanie wiązki stycznej $TM$ na $M$ i dla dowolnego $v \in TM$ przyjmijmy

$$\mathcal{V}(v) = \ker d\pi(v). \tag{2.10.22}$$

Wektory przestrzeni $V(v)$ nazywamy *pionowymi*. Ponieważ $\pi : TM \to M$ jest submersją, więc $\dim V(v) = \dim M$ i $V(v)$ można utożsamiać z przestrzenią styczną w punkcie $v$ do włókna $T_xM$, $x = \pi(v)$. Ponadto, oznaczmy przez $\mathcal{H}(v)$ zbiór wszystkich wektorów $\xi \in T_vTM$ postaci $\xi = dX(w)$, gdzie $X$ jest takim polem wektorowym na $M$, że $X(x) = v$ i $\nabla_w X = 0$. Można wykazać (por. ćwiczenie 2.10.12 poniżej), że $\mathcal{H}(v)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $T_vTM$ oraz, że $\mathcal{V}(v) \cap \mathcal{H}(v) = \{0\}$. Ponadto, różniczka $d\pi(v)$ przekształca $\mathcal{H}(v)$ na $T_xM$, $x = \pi(v)$. Rzeczywiście, jeżeli $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ jest krzywą, $\gamma(0) = x$, $\dot\gamma(0) = w \in T_xM$, to istnieje pole wektorowe $X$ na $M$ takie, że $X(x) = v$ i $X \circ \gamma$ jest polem równoległym. Wtedy $\nabla_w X = 0$, $\xi = dX(w) \in \mathcal{H}(v)$ i $d\pi(\xi) = w$. Wynika stąd, że każda przestrzeń styczna $T_vTM$ jest sumą prostą podprzestrzeni pionowej i poziomej:

$$T_vTM = \mathcal{V}(v) \oplus \mathcal{H}(v). \tag{2.10.23}$$

Jeżeli $\phi$ jest mapą na $M$ i $\tilde\phi$ jest pochodzącą od niej mapą na $TM$ (por. paragraf 2.4), to wektor $\xi = \sum_{j=1}^{2n} a_i(\partial/\partial\tilde\phi_j)(v)$ należy do $V(v)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Podobnie, można podać warunki konieczne i dostateczne na to by taki wektor należał do przestrzeni $\mathcal{H}(v)$:

**Ćwiczenie 2.10.12** Udowodnij, że jeżeli $\Gamma^k_{ij}$ są współrzędnymi pochodnej $\nabla$ w mapie $\phi$, to wektor $\xi = \sum_{j=1}^{2n} a_j(\partial/\partial\tilde\phi_j)(v)$ jest poziomy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_{n+k} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_i d\phi_j(v)\Gamma^k_{ij}(\pi(v)), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.10.24}$$

Rozkład (2.10.23) pozwala określić tzw. *odwzorowanie koneksji* $K : TTM \to TM$; $K$ przekształca liniowo każdą przestrzeń $T_vTM$ na $T_{\pi(v)}M$, jego jądrem jest przestrzeń wektorów poziomych, a na przestrzeni wektorów pionowych $\mathcal{V}(v)$ pokrywa się z odwróceniem kanonicznego izomorfizmu $\iota : T_xM \to T_v(T_xM)$ (por. paragraf 2.3). Inaczej mówiąc, $K$ jest złożeniem tego odwrócenia $\iota^{-1}$ z kanoniczną projekcją $T_vTM = \mathcal{V}(v) \oplus \mathcal{H}(v) \to \mathcal{V}(v)$. Można wykazać, że jeżeli $\xi = dX(w)$ dla pewnego pola wektorowego $X$ i pewnego $w \in TM$, to

$$K(\xi) = \nabla_w X. \tag{2.10.25}$$

Istotnie, tak określone odzworowanie $K$ znika na przestrzeni wektorów poziomych, a w mapach $\phi$ i $\tilde{\phi}$ wyraża się wzorem

$$K\left(\sum_{j=1}^{2n} a_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_j}(v)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{n+k} + \sum_{i,j=1}^{n} a_j \phi_i(\pi(v))\Gamma^k_{ji}(\pi(v))\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_k}(\pi(v)). \tag{2.10.26}$$

Jeżeli $a_1 = \cdots = a_n = 0$, to prawa strona (2.10.26) redukuje się do

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}(\partial/\partial\phi_k)(\pi(v)),$$

co pokazuje, że odwzorowanie określone wzorem (2.10.26) pokrywa się z $\iota^{-1}$ na przestrzeni wektorów pionowych.

**Ćwiczenie 2.10.13** Wyprowadź wzór (2.10.26). (Wskazówka: Zadanie to jest podobne do wyprowadzenia równania (2.10.24)).

# Rozdział 3

# Struktury

## 3.1 Grupy Liego

**Definicja 3.1.1** *Grupą Liego* nazywamy grupę $G$ wraz z taką strukturą rozmaitości, dla której działanie grupowe $\cdot : G \times G \to G$ oraz odwzrowowanie $G \ni a \mapsto a^{-1} \in G$ są odwzorowaniami gładkimi.

Z określenia wynika od razu, że odwzorowanie przypisujące elementom grupy Liego ich odwrotności jest dyfeomorfizmem. Dyfeomeorfizmami są też wszystkie odwzorowania $L_a$ i $R_a$ mnożenia lewo- i prawostronnego przez ustalony element $a$ grupy $G$:

$$L_a : G \ni b \mapsto a \cdot b \quad \text{oraz} \quad R_a : G \ni b \mapsto b \cdot a.$$

Wreszcie, dyfeomorfizmami są też wszystkie automorfizmy wewnętrzne $\mathrm{Ad}(a)$, $a \in G$:

$$\mathrm{Ad}(a) : G \ni b \mapsto a \cdot b \cdot a^{-1}.$$

W geometrii różniczkowej istotną rolę odgrywają te pola wektorowe $X$ na $G$, które są niezmiennicze ze względu na wszystkie odwzorowania $L_a$:

$$X(ba) = (L_b)_*(X(a)), \quad a, b \in G.$$

Pola te nazywamy *lewostronnie niezmienniczymi*, a ich zbiór oznaczamy symbolem $\mathfrak{g}$. Oczywiście, $\mathfrak{g}$ (z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia przez skalary) jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.

Łatwo pokazać, że pola lewostronnie niezmienicze są zupełne. Istotnie, jeśli $c : (\alpha, \beta) \to G$ jest krzywą całkową takiego pola $X$ i np. $\beta < \infty$, zaś $c_0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ jest jego krzywą całkową spełniającą warunek początkowy $c_0(0) = e$, to krzywa $C : (\alpha, \beta + \varepsilon/2) \to G$,

$$C(t) = \begin{cases} c(t), & \text{gdy} \quad t \in (\alpha, \beta) \\ L_{c(\beta-\varepsilon/2)}(c_0(t - \beta + \varepsilon/2)), & \text{gdy} \quad t \in (\beta - 3\varepsilon/2, \beta + \varepsilon/2) \end{cases},$$

jest określona poprawnie i jest też krzywą całkową pola $X$.

Niech więc $X$ będzie polem lewostronnie niezmienniczym, zaś $c : \mathbb{R} \to G$ jego maksymalną krzywą całkową spełniającą warunek $c(0) = e$. Ustaly $s \in \mathbb{R}$ i rozważmy dwie krzywe $C_1, c_2 : \mathbb{R} \to G$:

$$c_1(t) = c(t+s), \quad c_2(t) = c(s) \cdot c(t).$$

Obie są krzywymi całkowymi pola $X$, przy czym $c_1(0) = c_2(0) = c(s)$. Zatem $c_1 \equiv c_2$. Innymi słowy

$$a_{t+s} = a_t \cdot a_s, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

gdy $t \mapsto a_t$ jest maksymalna krzywą całkową pola lewostronnie niezmienniczego na grupie Liego $G$. Krótko mówiąc,

*przechodzące przez jedność grupy maksymalne krzywe całkowe pól lewostronnie niezmienniczych są podgrupami jednoparametrowymi.*

Niech teraz $(a_t)$ będzie jednoparametrową podgrupą wyznaczoną przez pole $X \in \mathfrak{g}$. Wtedy mamy następujące

**Twierdzenie 3.1.2** *(i) Potok pola $X$ pokrywa się z rodziną odwzorowań $R_{a_t}$, $t \in \mathbb{R}$.*

*(ii) Nawias Liego pól lewostronnie niezmienniczych jest polem lewostronnie niezmienniczym. Zatem $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego.*

*Dowód.* (i) Należy pokazać, że dla dowolnego $b \in G$ krzywa $c : \mathbb{R} \ni t \mapsto b \cdot a_t$ jest trajektorią pola $X$. Wobec lewostronnej niezmienniczości pola $X$ mamy dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{c}(s) &= (t \mapsto b \cdot a_t)^{\dot{}}(s) = (L_b)_*((t \mapsto a_t)^{\dot{}}(s)) = (L_b)_*(X(a_s)) \\ &= X(b \cdot a_s) = X(c(s)). \end{aligned}$$

(ii) Jeżeli $X, Y \in \mathfrak{g}$, $a, b \in G$ i $(a_t)$ jest jednoparametrową podgrupą wyznaczoną przez $X$, to na mocy twierdzenia 2.7.5 i oczywistej równości $R_a \circ L_b = L_b \circ R_a$ (spełnionej dla dowolnych elementów $a$ i $b$ dowolnej grupy $G$) mamy

$$\begin{aligned} (L_b)_*([X,Y](a)) &= (L_b)_* \left( \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \big( Y(a) - (R_{a_{-t}})_*(Y(a \cdot a_t)) \big) \right) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \big( (L_b)_*(Y(a)) - (R_{a_{-t}})_*((L_b)_*(Y(a \cdot a_t))) \big) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big( Y(b \cdot a) - (R_{a_{-t}})_*(Y(b \cdot a \cdot a_t)) \big) = [X,Y](b \cdot a), \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

Zauważmy też, że dla dowolnego wektora $v \in T_eG$ wzór

$$X_v(a) = (L_a)_*(v)$$

określa pole lewostronnie niezmennicze $X_v$. Przyporządkowanie $T_eG \ni v \mapsto X_v \in \mathfrak{g}$ jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym, zatem $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ i przestrzeń styczną $T_eG$ można utożsamiać z algebrą Liego grupy $G$.

Istotne dla teorii grup Liego jest nastepujące twierdzenie, którego dowód tu pomijamy:

**Twierdzenie 3.1.3** *Każda podgrupa domknięta dowolnej grupy Liego jest też grupą Liego.* □

**Przykład 3.1.4** (i) Przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ z dodawaniem jest $n$-wymiarową przemienną grupą Liego o przemiennej (tj. z nawiasem Liego równym tożsamościowo zeru) algebrze Liego. Podobnie torus $T^n = (S^1)^n$ z naturalnym mnożeniem jest przemienną grupą Liego; znowu, jej algebra Liego jest przemienna, a $\mathbb{R}^n$ jest nakryciem uniwersalnym torusa $T^n$.

(ii) *Grupa liniowa* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ rzeczywistych, nieosobliwych macierzy kwadratowych stopnia $n$ z działaniem mnożenia macierzy może być w naturalny sposób utożsamiona w podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^{n^2}$, jest więc grupą Liego wymiaru $n^2$. Jej algebra Liego $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ składa się z wszystkich macierzy kwadratowych $n \times n$ z nawiasem danym wzorem

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X.$$

Istotnie, jeżeli $(A_t)$ jest jednoparametrową podgrupą naszej grupy liniowej, to $A'(0)$ jest (być może osobliwą) macierzą kwadratową stopnia $n$, a jeśli $X$ jest dowolną taką macierzą, to

$$A_t = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (tX)^k, \quad t \in \mathbb{R}$$

jest grupą jednoparametrową macierzy nieosobliwych (por. ćwiczenie 3.1.5 poniżej) i $X = A'(0)$. Przy tym, jeśli $(A_t)$ i $(B_t)$ są dwoma takimi podgrupami, $X = A'(0)$ i $Y = B'(0)$, to

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (Y - A_{-t} \cdot Y \cdot A_t) = -\frac{d}{dt} (A_{-t} \cdot Y \cdot A_t) \\ &= A'(0) \cdot Y \cdot I - I \cdot Y \cdot A'(0) = X \cdot Y - Y \cdot X. \end{aligned}$$

Podgrupa $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{C})$ grupy liniowej złożona ze wszystkich macierzy o wyznaczniku dodatnim jest otwarta w $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (i równa jej składowej spójności zawierającej macierz jednostkową $I \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$), jest więc grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

(iii) Wobec twierdzenia 3.1.3, grupami Liego są takie podgrupy domknięte grupy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ jak m.in. *specjalna grupa liniowa* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}); \det A = 1\}$, *grupa ortogonalna* $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}); A^{-1} = A^\top\}$ i jej zawierająca macierz jednostkową składowa spójności $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Ich algebrami Liego są odpowiednio $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}); \mathrm{Trace}(A) = 0\}$ i $\mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}); A^\top = -A\}$. Istotnie, w przypadku np. grupy ortogonalnej, jeżeli $(A_t)$ jest jej podgrupą jednoparametrową, to $A_0 = I$ i różniczkując tożsamość

$$A_t \cdot A_t^\top = I$$

otrzymujemy

$$A'(0) + (A'(0))^\top = 0,$$

co dowodzi, że algebra $\mathfrak{so}(n)$ zawiera się w algebrze macierzy skośnie symetrycznych. Odwrotnie, jeśli $X$ jest macierzą skośnie symetryczną wymiaru $n \times n$ i $A_t = \exp(tX)$, to $(A_t)$ jest jednoparametrową podgrupą grupy $\mathrm{SO}(n)$ i $X = A'(0)$, więc $X$ jest elementem algebry $\mathfrak{so}(n)$.

(iv) Podobnie, grupa $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ nieosobliwych macierzy zespolonych stopnia $n$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{C}^{n^2}$, jest więc zespoloną grupą Liego zespolonego wymiaru $n^2$. Podobnie jak w (ii), jej algebra Liego $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ składa się z wszystkich zespolonych macierzy kwadratowych stopnia $n$ i $[X,Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$ dla dowolych $X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Grupami Liego są więc też takie domknięte podgrupy grupy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ jak podgrupa $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ macierzy zespolonych o wyznaczniku 1, podgrupa $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}); A^{-1} = \bar{A}^\top\}$ macierzy *unitarnych* i jej podgrupa $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. macierzy *specjalnych unitarnych*. Podobnie jak dla grupy ortogonalnej można wykazać, że algebra Liego $\mathfrak{u}(n)$ grupy unitarnej składa się ze wszystkich macierzy zespolonych $X$, dla których $X^\top = -\bar{X}$, zaś algebra $\mathfrak{su}(n)$ grupy specjalnej unitarnej – ze wszystkich bezśladowych ($\mathrm{Trace}(X) = 0$) elementów algebry $\mathfrak{u}(n)$.

**Ćwiczenie 3.1.5** Udowodnij, że

(i) szereg

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{1}{2} \cdot X^2 + \frac{1}{6} \cdot X^3 + \dots \tag{3.1.1}$$

jest zbieżny dla dowolnej macierzy kwadratowej $X$,

(ii) jeżeli macierze $X$ i $Y$ komutują (tj. $X \cdot Y = Y \cdot X$), to

$$\exp(X+Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y), \tag{3.1.2}$$

(iii) dla dowolnej macierzy $X$ mamy

$$\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{Trace}(X)). \tag{3.1.3}$$

(Wskazówka: Z postaci kanonicznej Jordana i wzoru (3.1.1) wywnioskuj, że jeśli $\lambda$ jest wartością własną macierzy $X$, to $\exp(\lambda)$ jest wartością własną macierzy $\exp(X)$.)

**Ćwiczenie 3.1.6** Udowodnij szczegółowo, że algebry Liego grup z punktów (iii) i (iv) przykładu 3.1.4 są dokładnie takie jak tam wskazano.

## 3.2 Wiązki główne

Jeżeli $M$ jest rozmaitością, zaś $G$ — grupą Liego, to *działaniem grupy $G$ na $M$* nazywamy taki homomorfizm $h : G \to \mathrm{Diff}(M)$, że odwzorowanie

$$M \times G \ni (x, a) \mapsto h(a)(x) \in M$$

jest gładkie. Będziemy często pisali $a \cdot x$ zamiast $h(a)(x)$, a ponieważ wtedy

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot x = a_1 \cdot (a_2 \cdot x)$$

dla wszystkich $a_1, a_2 \in G$ i $x \in M$, to działanie takie nazywamy *lewostronnym*. Pisząc $x \cdot a = a^{-1} \cdot x$ otrzymujemy odwzorowanie produktu $M \times G$ w $M$ takie, że

$$x \cdot (a_1 \cdot a_2) = (x \cdot a_1) \cdot a_2$$

dla wszystkich $a_1, a_2 \in G$ i $x \in M$; odwzorowanie takie nazwiemy *działaniem prawostronnym* grupy $G$ na $M$. Działanie takie nazwiemy (1) *efektywnym*, (2) *wolnym*, (3) *tranzytywnym*, gdy — odpowiednio — (1) $h(a) = \mathrm{id}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a$ jest jednością $e$ grupy $G$, (2) równość $x \cdot a = x$ dla pewnych $x \in M$ i $a \in G$ implikuje równość $a = e$, (3) dla dowolnych $x$ i $y \in M$ istnieje element $a \in G$ taki, że $x \cdot a = y$. (Analogiczna terminologia obowiązuje w przypadku działań lewostronnych.) Oczywiście, każde działanie wolne jest efektywne (ale nie odwrotnie).

**Ćwiczenie 3.2.1** Podaj przykłady działania (pewnej grupy na pewnej rozmaitości): (1) tranzytywnego i wolnego, (2) efektywnego ale nie wolnego, (3) tranzytywnego ale nie efektywnego.

Przypuśćmy teraz, że mamy dwie rozmaitości $M$ i $P$, submersję $p : P \to M$ przekształcającą $P$ na $M$ i grupę Liego $G$ działającą w sposób prawostronny i wolny na $P$. Przy tym, załóżmy, że dla dowolnych $u \in P$ i $a \in G$ mamy $p(u \cdot a) = p(u)$. Zatem $G$ działa na *włóknach* $P_x = p^{-1}(x)$ submersji $p$. Załóżmy ponadto, że działania grupy $G$ na wszystkich włóknach $P_x$, $x \in M$, są tranzytywne. Jeśli więc $u_1, u_2 \in P$ i $p(u_1) = p(u_2)$, to $u_2 = u_1 \cdot a$ dla pewnego $a \in G$. Wreszcie, załóżmy, że nasza struktura na $P$ jest *lokalnie trywialna*, tj. że rozmaitość $M$ można pokryć takimi zbiorami otwartymi $U$, że rozmiatości $p^{-1}(U)$ i $U \times G$ są dyfeomorficzne poprzez taki dyfeomorfizm $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times G$, że $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = p$ (tzn. $\Phi$ przekształca włókna submersji $p$ we włókna naturalnego rzutowania $\mathrm{pr}_1 : U \times G \to U$ na pierwszy czynnik) oraz jest zgodny z działaniami grupy $G$ na $P$ i na samej sobie, tzn., że

$$\Phi(u \cdot a) = (\mathrm{pr}_1(\Phi(u)), (\mathrm{pr}_2(\Phi(u)) \cdot a), \tag{3.2.1}$$

gdy $u \in p^{-1}(U)$ i $a \in G$.

**Definicja 3.2.2** W powyższej sytuacji układ $(P, M, G, p)$ nazywamy *wiązką główną* (nad $M$). $P$ jest jej *przestrzenią*, $M$ — *bazą*, $G$ — *grupą strukturalną*, zaś $p$ — *rzutowaniem*. Opisane powyżej odwzorowania $\Phi$ są *lokalnymi trywializacjami* naszej wiązki.

Rozważmy teraz dwie wiązki główne $(P_1, M, G_1, p_1)$ i $(P_2, M, G_2, p_2)$ nad tą samą rozmaitością $M$. Odwzorowanie $F : P_1 \to P_2$ nazywamy *morfizmem* (lub, *homomorfizmem*) *wiązek*, gdy $p_2 \circ F = p_1$ oraz

$$F(u \cdot a) = F(u) \cdot h(a), \quad u \in P_1,\ a \in G_1, \tag{3.2.2}$$

gdzie $h : G_1 \to G_2$ jest homomorfizmem grup. Morfizm $F : P_1 \to P_2$ nazywamy *izomorfizmem wiązek*, gdy jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym i przekształcenie odwrotne $F^{-1} : P_2 \to P_1$ jest też morfizmem wiązek.

**Przykład 3.2.3** (i) Produkt $P = M \times G$ z rzutowaniem $p = \mathrm{pr}_1$ i działaniem $(x, a) \cdot b = (x, a \cdot b)$ jest najprostszym przykładem wiązki głównej nad $M$. Wiązkę tą (i każdą z nią izomorficzną) nazywamy *trywialną*.

(ii) Każda rozmaitość $M$ wyznacza *wiązkę liniową* $L(M)$, której bazą jest $M$, zaś grupą strukturalną — grupa liniowa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ($n = \dim M$). Przestrzeń tej wiązki składa się ze wszystkich baz uporządkowanych $v = (v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni stycznych $T_xM$, $x \in M$, a rzutowanie przypisuje bazie $v$ wspólny punkt $x$ styczności wektorów $v_i$ do $M$. Wiązka ta jest trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje na $M$ układ $(X_1, \ldots, X_n)$ pól wektorowych liniowo niezależnych w każdym punkcie (mówimy wtedy, że rozmaitość $M$ jest *paralelizowalna*). Wiązki liniowe większości rozmaitości trywialne nie są.

**Definicja 3.2.4** *Przekrojem* (globalnym) wiązki głównej $(P, M, G, p)$ nazywamy każde odwzorowanie $s : M \to P$ gładkie i takie, że

$$p \circ s = \mathrm{id}_M\,. \tag{3.2.3}$$

**Twierdzenie 3.2.5** *Wiązka główna $(P, M, G, p)$ posiada przekrój globalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest trywialna.*

*Dowód.* Oczywiście, wiązka trywialna $P = M \times G$ posiada przekrój globalny $s$. Np., można dla dowolnego $x \in M$ przyjąć $s(x) = (x, a)$, gdzie $a$ jest ustalonym elementem grupy $G$. Odwrotnie, jeśli $s : M \to P$ jest przekrojem, to odwzorowanie $F : M \times G \to P$ dane wzorem

$$F(x, a) = s(x) \cdot a$$

jest izomorfizmem wiązek. □

Wobec powyższego twierdzenia, przekroje globalne wiązek głównych na ogół nie istnieją. Ponieważ jednak wiązki główne są lokalnie trywialne, więc istnieją ich *przekroje lokalne*, tzn. odwzorowania $s : U \to P$ określone na pewnych podzbiorach otwartych $U$ bazy $M$ i spełniające tam warunek (3.2.3).

Jeżeli $H \subset G$ jest podgrupą domkniętą grupy strukturalnej $G$ wiązki głównej $(P, M, G, p)$ i $P'$ jest takim podzbiorem przestrzeni $P$, że $p(P') = M$, a jeśli $u \in P'$, to $u' \in P'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u' = u \cdot a$ dla pewnego $a \in H$, to $P'$ nazywamy *subwiązką* [1] wiązki $P$. Mówimy też, że wiązka $(P', M, H, p|P')$ jest *redukcją* wiązki $P$ do grupy $H$. Można się spodziewać, że redukcje pewnych wiązek do pewnych podgrup ich grup strukturalnych mogą nie istnieć.

**Przykład 3.2.6** Jeżeli rozmaitość $M$ ($\dim M = n$) jest orientowalna, to istnieje na niej nigdzie nieznikająca $n$-forma $\Omega$ (por. twierdzenie 2.9.2). Niech $P \subset L(M)$ będzie zbiorem wszystkich baz $(v_1, \dots v_n)$ przestrzeni stycznych $T_xM$, $x \in M$, takich, że

$$\Omega(v_1, \dots v_n) = 1, \tag{3.2.4}$$

zaś $P^+$ zbiorem wszystkich takich baz, dla których

$$\Omega(v_1, \dots v_n) > 0.$$

Można sprawdzić, że $P$ jest redukcją wiązki liniowej $L(M)$ do grupy $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, zaś $P'$ jej redukcją do $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$. Odwrotnie, jeśli $P$ jest taką redukcją, to wzór (3.2.4) określa $n$-formę na $M$. Reasumując, *rozmaitość $M$ jest orientowalna wtedy i tylko, gdy jej wiązka liniowa $L(M)$ jest redukowalna do grupy $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ lub, równoważnie, $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$.*

Redukcje wiązki $L(M)$ do podgrupy $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ($n = \dim M$) nazywa się *$G$-strukturami* na $M$. Tak więc, orientacje rozmaitości $M$ są tożsame z $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$-strukturami, zaś formy objętości — z $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$-strukturami. $G$-struktury dla niektórych innych podgrup $G$ zostaną omówione w następnych rozdziałach.

Na koniec, przyjmijmy następującą terminologię: $G$-struktura $P \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ jest *całkowalna* lub *lokalnie płaska*, gdy dla każdego punktu $x \in M$ istnieje mapa

[1] Termin "*podwiązka*" wydaje się być niezręcznym.

$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ określona w otoczeniu $D_\phi$ tego punktu i taka, że układ wektorów $((\partial/\partial\phi_1)(y), \ldots (\partial/\partial\phi_n)(y))$ należy do $P$ dla dowolnego $y \in D_\phi$. Oczywiście, każda $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$-struktura jest całkowalna. Istotnie, wystarczy wziąć dowolną mapę $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ o spójnej dziedzinie, a jeśli nie spełnia powyższego warunku, zastąpić ją przez np. $\tilde{\phi} = (-\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

**Ćwiczenie 3.2.7** Zbadaj czy wszystkie $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$-struktury są lokalnie płaskie.

# 3.3 Koneksje liniowe II

## 3.3.1 Dystrybucja pozioma

Oznaczmy tutaj przez $P$ wiązkę liniową $L(M)$ rozmaitości $M$, zaś przez $G$ — jej grupę strukturalną $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $n = \dim M$.

Niech $\nabla$ będzie pochodną kowariantną na rozmaitości $M$, zaś $\tau_\gamma$, $\gamma : [a, b] \to M$, odpowiadającym jej przeniesieniem równoległym wzdłuż krzywej $\gamma$. Przypomnijmy (patrz paragraf 2.10.3), że $\tau_\gamma$ jest izomorfizmem przestrzeni stycznej $T_{\gamma(a)}M$ na $T_{\gamma(b)}M$, przeprowadza więc dowolną bazę $u$ pierwszej z nich na pewną bazę drugiej. Izomorfizm $\tau_\gamma$ wyznacza więc przekształcenie (oznaczane tu nadal przez $\tau_\gamma$) włókna $P_x$, $x = \gamma(a)$, wiązki liniowej $P = L(M)$ na jej włókno $P_y$, $y = \gamma(b)$. Z określenia przekształcenia $\tau_\gamma$ wynika, że

$$\tau_\gamma(u \cdot a) = \tau_\gamma(u) \cdot a \tag{3.3.1}$$

dla wszystkich $u \in P_x$ i $a \in G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Ustalmy element $u \in P_x$. Krzywą $\tilde{\gamma}_u : [a, b] \ni t \mapsto \tau_{\gamma|[a,t]}(u)$ na $P$ nazywamy *podniesieniem poziomym* krzywej $\gamma$. Z (3.3.1) wynika, że $\tilde{\gamma}_{u \cdot a} = R_a \circ \tilde{\gamma}_u$, gdy $u \in P_x$, $a \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$; oczywiście, $p \circ \tilde{\gamma}_u = \gamma$. Krzywą $c$ na $P$ nazywamy *poziomą*, gdy jest podniesieniem poziomym pewnej krzywej na $M$, zaś wektor $\xi \in TP$ — *poziomym*, gdy jest styczny do pewnej krzywej poziomej na $P$. Przestrzeń wszystkich wektorów poziomych stycznych do $P$ w punkcie $u$ oznaczymy symbolem $\mathcal{H}(u)$. Podobnie, wektor $\xi$ nazwiemy *pionowym*, gdy $p_*(v) = 0$ (gdy więc jest styczny do pewnego włókna wiązki $P$), a przestrzeń wszystkich wektorów pionowych stycznych do $P$ w punkcie $u$ oznaczymy przez $\mathcal{V}(u)$. Z określenia wynika od razu, że $\mathcal{H}(u) \cap \mathcal{V}(u) = \{0\}$ oraz, że różniczka $p_*$ przekształca $\mathcal{H}(u)$ wzajemnie jednoznacznie na $T_{p(u)}M$. Ponadto (por. ćwiczenie 3.3.1 poniżej), $\mathcal{H}(u)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni stycznej $T_uP$. Zatem,

$$T_uP = \mathcal{H}(u) \oplus \mathcal{V}(u) \tag{3.3.2}$$

oraz $\dim \mathcal{H}(u) = \dim M$ i $\dim \mathcal{V}(u) = \dim G$.

**Ćwiczenie 3.3.1** Wykaż, że opisany powyżej zbiór $\mathcal{H}(u)$ jest popdprzestrzenią liniową przestrzeni stycznej $T_uP$.

Z twierdzeń o gładkiej zależności rozwiązań od warunków początkowych dla układów równań różniczkowych zwyczajnych wynika, że przyporządkowanie $P \ni u \mapsto \mathcal{H}(u)$ jest gładką dystrybucją na $P$. Z (3.3.1) i określenia dystrybucji $\mathcal{H}$ otrzymujemy warunek

$$\mathcal{H}(u \cdot a) = (R_a)_*(\mathcal{H}(u)) \tag{3.3.3}$$

dla wszystkich $u \in P$ oraz $a \in G$.

Odwrotnie, jeżeli $\mathcal{H}$ jest dystrybucją na $P = L(M)$ spełniającą warunki (3.3.2) i (3.3.3), to przyjmując iż podniesieniem poziomym krzywej $\gamma$ jest taka krzywa $\tilde{\gamma}$, że $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ i $\tilde{\gamma}(t) \in \mathcal{H}(\tilde{\gamma}(t))$ dla wszystkich $t$ i określając punkt $\tau_\gamma(u)$ jako koniec podniesienia poziomego krzywej $\gamma$ o poczatku $u$ otrzymujemy przekształcenie $\tau_\gamma$ pomiędzy włóknami wiązki $P$ spełniające warunek (3.3.1). Przekształcenie to wyznacza izomorfizm (oznaczany też przez $\tau_\gamma$) pomiędzy przestrzeniami stycznymi do $M$ w początku $x$ i końcu $y$ krzywej $\gamma$: jeśli $v \in T_xM$, to wektor $\tau_\gamma(v)$ ma w bazie $\tau_\gamma(u)$ takie same współrzędne jak wektor $v$ w bazie $u$ przestrzeni $T_xM$. (Z warunku (3.3.1) wynika, iż określenie to jest poprawne: wektor $\tau_\gamma(v)$ nie zależy od wyboru bazy $u$ użytej w powyższej konstrukcji.) Na koniec, wzór (2.10.16) w twierdzeniu 2.10.6 pozwala określić odwzorowanie $\nabla$ przypisujące dowolnemu wektorowi $v \in TM$ i polu wektorowemu $X$ na $M$ wektor $\nabla_v X \in T_xM$. Tak określone przekształcenie $\nabla$ spełnia (por. ćwiczenie 3.3.3 poniżej) warunki definicji 2.10.1. Zatem, istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy koneksjami w sensie definicji 2.10.1, a dystrybucjami $\mathcal{H}$ poziomymi na $P = L(M)$, co pozwala przyjąć następujące, równoważne tej definicji, określenie koneksji.

**Definicja 3.3.2** *Koneksją liniową* na rozmaitości $M$ nazywamy dowolną, spełniającą warunki (3.3.2) i (3.3.3) dystrybucję $\mathcal{H}$ na przestrzeni $L(M)$ wiązki liniowej nad $M$.

**Ćwiczenie 3.3.3** Wykaż, że opisane powyżej odwzorowanie $\nabla$ jest pochodną kowariantną na $M$, tj. że spełnia wszystkie warunki definicji 2.10.1.

**Uwaga 3.3.4** Definicję 3.3.2 przenosi się w naturalny sposób na dowolne wiązki główne: jeżeli $(P, M, G, p)$ jest taką wiązką, to *koneksją* w $P$ nazywa się dystrybucję $\mathcal{H}$ na $P$ taką, że — dla wszystkich $u \in P$ i $a \in G$ — $T_uP = \mathcal{H}(u) \oplus \mathcal{V}(u)$ oraz $\mathcal{H}(ua) = (R_a)_*(\mathcal{H}(u))$, gdzie — jak poprzednio — $\mathcal{V}(u) = \ker(p_*|T_uP)$ jest przestrzenią wektorów *pionowych*; oczywiście wektory z $\mathcal{H}(u)$, $u \in P$, nazywamy *poziomymi.* Znaczna część teorii koneksji liniowych przenosi się na przypadek dowolnych wiązek głównych.

### 3.3.2 Forma koneksji

Niech $\mathcal{H}$ będzie koneksją (w sensie definicji 3.3.2) we wiązce liniowej $P = L(M)$ rozmaitości $M$, $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $n = \dim M$, będzie jej grupą strukturalną, zaś $\mathfrak{g} =$

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ algebrą Liego grupy $G$. Dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$ i $u \in P$ przyjmijmy

$$X^*(u) = (t \mapsto \dot{u} \cdot a_t)(0),$$

gdzie $(a_t)$ jest jednoparametrową podgrupą grupy $G$ wyznaczoną przez $X$. Innymi słowy, $X^*$ jest polem na $P$, którego potokiem jest rodzina odwzorowań $(R_{a_t})$, $t \in \mathbb{R}$, $R_{a_t}(u) = u \cdot a_t$ dla $u \in P$. Ponieważ działanie grupy $G$ na $P$ zachowuje włókna, $X^*$ jest polem pionowym, tj. $p_* \circ X^* = 0$. Pola wektorowe $X^*$ na $P$, $X \in \mathfrak{g}$, nazywamy *fundamentalnymi polami pionowymi*.

**Ćwiczenie 3.3.5** Wykaż, że (1) przyporządkowanie $\mathfrak{g} \ni X \mapsto X^* \in \mathcal{X}(P)$ jest homomorfizmem algebr Liego, tzn., że $(aX + bY)^* = a \cdot X^* + b \cdot Y^*$ oraz $[X,Y]^* = [X^*, Y^*]$, gdy tylko $X, Y \in \mathfrak{g}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, (2) znikanie pola $X^*$ w pewnym punkcie $u \in P$ implikuje równości $X = 0$ i $X^* \equiv 0$, (3) dla dowolnego $\xi \in \mathcal{V}(u)$ istnieje $X \in \mathfrak{g}$ takie, że $\xi = X^*(u)$.

Zdefiniujmy teraz 1-formę $\omega$ na $P$ o wartościach w algebrze $\mathfrak{g}$ wzorami

$$\omega(X^*) = X \quad \text{and} \quad \omega(\xi) = 0, \tag{3.3.4}$$

gdy $X \in \mathfrak{g}$ i $v \in \mathcal{H}$. Ponieważ, $\mathcal{H}$ jest dystrybucją gładką i $TP = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, więc wzory te definiują formę $\omega$ poprawnie.

**Definicja 3.3.6** Formę $\omega$ określoną wzorami 3.3.4 nazywamy *formą koneksji* $\mathcal{H}$ (lub koneksji $\nabla$, gdy $\nabla$ jest pochodną kowariantną wyznaczającą dystybucję $\mathcal{H}$).

Ponieważ, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ składa się z macierzy kwadratowych stopnia $n$, więc formę $\omega$ można traktować jak macierz $(\omega_{ij}; i,j \leqslant n)$ 1-form na $P$ o wartościach skalarnych. Oczywiście, formy $\omega_{ij}$, $i,j = 1,\ldots,n$, nazywamy też *formami koneksji*.

**Ćwiczenie 3.3.7** Korzystając z warunku (3.3.3) udowodnij, że dla dowolnego $a \in G$ zachodzi równość

$$(R_a)^*\omega = \mathrm{ad}(a^{-1}) \cdot \omega, \tag{3.3.5}$$

(dokładniej, równość

$$\omega((R_a)^*(\xi)) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\omega(\xi)), \quad \xi \in TP), \tag{3.3.6}$$

gdzie — jak zwykle — $R_a : P \to P$ jest mnożeniem prawostronnym przez $a$ na $P$, zaś $\mathrm{ad}(b)$ $(b \in G)$ — różniczką w punkcie $e$ automorfizmu wewnętrznego $\mathrm{Ad}(b) : G \ni c \mapsto b \cdot c \cdot b^{-1}$. (Wskazówka: wykaż równość (3.3.6) osobno dla wektorów poziomych i pionowych.)

### 3.3.3 Formy krzywizny i skręcenia

Niech znowu $\mathcal{H}$ będzie koneksją we wiązce $P = L(M)$ nad rozmaitością $M$. Dla dowolnej $k$-formy $\eta$ na $L(M)$ i wektorów $\xi_1, \dots, \xi_k$ stycznych do $L(M)$ w pewnym punkcie $u$ przyjmijmy

$$D\eta(\xi_1, \dots, \xi_k) = d\eta(h\xi_1, \dots, h\xi_k), \tag{3.3.7}$$

gdzie $h : TP \to \mathcal{H}$ jest rzutowaniem równoległym do $\mathcal{V}$; krótko,

$$D\eta = d\eta \circ (h \times \dots \times h).$$

Oczywiście, $D\eta$ jest $(k+1)$-formą na $L(M)$, a operator $D$ ma własności analogiczne do różniczkowania zewnętrznego $d$: jest $\mathbb{R}$-liniowy, $D(\eta_1 \wedge \eta_2) = D\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^k \eta_1 \wedge D\eta_2$, gdy $\eta_1$ jest $k$-formą, etc. Dlatego $D$ nazywamy *zewnętrznym różniczkowaniem kowariantnym* na $L(M)$. Oczywiście, w przeciwieństwie do $d$, $D$ zależy od koneksji $\mathcal{H}$.

Dowolną $\mathfrak{g}$-wartościową ($\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$) formę $\eta$ na $L(M)$ nazywa się *pseudotensorową*, gdy — tak jak forma koneksji $\omega$ —jest $G$-niezmiennicza w sensie (3.3.5), tj. gdy równość

$$(R_a)^* \eta = \mathrm{ad}(a^{-1}) \cdot \eta$$

zachodzi dla wszystkich $a \in G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Formę pseudotensorową $\eta$ nazywa się *tensorową*, gdy $\eta$ zeruje się na wszystkich układach wektorów stycznych do $P$ takich, że przynajmniej jeden z nich jest pionowy. Oczywiście, forma koneksji $\omega$ jest pseudotensorowa, ale nie jest tensorowa.

**Ćwiczenie 3.3.8** Udowodnij, że jeśli $\eta$ jest formą pseudotensorową na $P$, to (1) różniczka $d\omega$ jest pseudotensorowa, (2) różniczka kowariantna $D\omega$ jest formą tensorową.

**Definicja 3.3.9** Zewnętrzną różniczkę kowariantną $\Omega = D\omega$ formy koneksji $\omega$ nazywamy *formą krzywizny* koneksji $\mathcal{H}$.

Z definicji wynika od razu, że $\Omega$ jest $\mathfrak{g}$-wartościową 2-formą tensorową na $L(M)$.

**Twierdzenie 3.3.10** *Zachodzi równość*

$$d\omega = \Omega - [\omega, \omega]. \tag{3.3.8}$$

Oczywiście, równość (3.3.8) oznacza, że

$$d\omega(\xi_1, \xi_2) = \Omega(\xi_1, \xi_2) - [\omega(\xi_1), \omega(\xi_2)],$$

gdy $\xi_1, \xi_2 \in T_uP$, $u \in P$, a $[\cdot,\cdot]$ oznacza nawias Liego w algebrze $\mathfrak{g}$.

*Dowód.* Wystarczy rozważyć trzy przypadki: (i) $\xi_1 = X^*(u)$ i $\xi_2 = Y^*(u)$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, są pionowe, (ii) $\xi_1 = X^*(u)$ jest pionowy, zaś $\xi_2 = V^h(u)$ jest wartością w $u$ poziomego podniesienia $V^h$ pewnego pola wektorowego $V$ na $M$, (iii) $\xi_1 = V^h(u)$ i $\xi_2 = W^h(u)$ dla pewnych pól $V$ i $W$ na $M$. (Oczywiście, poziome podniesienie dowolnego pola wektorowego $V$ na $M$, to takie pole wektorowe $V^h$ na $M$, że $p_* \circ V^h = V \circ p$ i $V^h(u) \in \mathcal{H}(u)$ dla wszystkich $u \in P$.)

W przypadku (i) — wobec (2.9.4), (3.3.4) i części (1) ćwiczenia 3.3.5 — mamy $d\omega(X^*, Y^*) = [X, Y]$. Oczywiście, $\Omega(X^*, Y^*) = 0$, zatem żądana równość jest spełniona.

W przypadku (ii), $d\omega(X^*, V^h) = 0$ ponieważ z $G$-niezmienniczości (3.3.3) dystrybucji $\mathcal{H}$ i wzoru (2.7.3) wynika, że nawias Liego $[X^*, V^h]$ jest wektorem poziomym. Podobnie, $\Omega(X^*, V^h) = 0$ i $[\omega(X^*), \omega(V^h)] = [X, 0] = 0$.

Wreszcie w przypadku (iii), $\Omega(V^h, W^h) = d\omega(V^h, W^h)$ i $[\omega(V^h), \omega(W^h)] = [0, 0] = 0$. □

**Ćwiczenie 3.3.11** Udowodnij, że wprowadzone w powyższym dowodzie podniesienie poziome pól wektorowych ma następującą własność:

$$h([V^h, W^h]) = [V, W]^h,$$

gdy $V$ i $W$ są dowolnymi polami wektoroymi na rozmaitości $M$.

Drugą ważną własnością formy krzywizny jest tzw. *druga tożsamość Bianchi* z poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie 3.3.12** *Dla formy krzywizny $\Omega$ dowolnej koneksji mamy*

$$D\Omega = 0. \tag{3.3.9}$$

*Dowód.* Ponieważ $\Omega$ jest formą tensorową, więc i $D\Omega$ jest taką formą, w szczególności $D\Omega$ zeruje się na wszystkich układach wektorów zawierających wektory pionowe. Wystarczy więc wykazać, że

$$d\Omega(V_1^h, V_2^h, V_3^h) = 0,$$

dla dowolnych pól wektorowych $V_1, V_2.V_3$ na $M$. Z równania strukturalnego (3.3.8) wynika, że dla dowolnej permutacji $(i, j, k)$ zbioru $\{1, 2, 3\}$ mamy

$$\Omega([V_i^h, V_j^h], V_k^h) = d\omega([V_i^h.V_j^h], V_k^h),$$

a z samej definicji formy $\Omega$,

$$V_i^h(\Omega(V_j^h, V_k^h)) = V_i^h(d\omega(V_j^h, V_k^h).$$

Stąd i z (2.9.4),

$$d\Omega(V_1^h, V_2^h, V_3^h) = d(d\omega(V_1^h, V_2^h, V_3^h)) = 0,$$

co należało wykazać. $\square$

Można się spodziewać, że — tak jak dystrybucja $\mathcal{H}$ i forma koneksji $\omega$ są związane z pochodną kowariantną $\nabla$ — forma krzywizny $\Omega$ jest jakoś związana z tensorem krzywizny $R$ z paragrafu 2.10.2. Aby taki związek wyprowadzić i opisać, wprowadzimy pewne niezbędne pojęcia.

Dla dowonego elementu $\alpha$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i dowolnego $u \in P = L(M)$ istnieje dokładnie jeden element $\xi = B(\alpha)(u)$ przestrzeni poziomej $\mathcal{H}(u)$ taki, że $\alpha$ jest ciągiem współrzędnych wektora $p(\xi)$ w bazie $u$ przestrzeni $T_xM$, $x = p(u)$. Innymi słowy, jeżeli dowolną bazę $u = (u_1, \dots, u_n)$ przestrzeni $T_xM$ potraktujemy jako izomorfizm liniowy przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na $T_xM$ przypisujący dowolnemu $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ wektor $\sum_i \beta_i u_i$, to

$$B(\alpha)(u) = (p_*|\mathcal{H}(u))^{-1}(u(\alpha)).$$

Zatem, $B(\alpha)(u)$ jest podniesieniem poziomym do punktu $u$ wektora $u(\alpha)$. Z gładkości dystrybucji $\mathcal{H}$ wynika od razu, że przyporządkowanie $P \ni u \mapsto B(\alpha)(u)$ jest gładkim polem wektorowym na $P$. Pole takie nazywamy *standardowym polem poziomym* (odpowiadajacym wektorowi $\alpha$).

Ponadto, istnieje na $P = L(M)$ tzw. *forma kanoniczna* $\theta$, tj. 1-forma o wartościach w $\mathbb{R}^n$ dana wzorem

$$\theta(\xi) = u^{-1}(\pi_*(\xi)), \quad \text{gdy} \quad \xi \in T_uP, \; u \in P. \tag{3.3.10}$$

Z powyższego określenia wynika łatwo, że $\theta$ jest formą tensorową w następującym sensie: zeruje się na wektorach pionowych oraz

$$\begin{aligned} (R_a)^*\theta(\xi) = \theta((R_a)_*(\xi)) &= (u \cdot a)^{-1}(\pi_*((R_a)_*(\xi))) \\ &= a^{-1} \cdot u^{-1}(\pi_*(\xi)) = a^{-1} \cdot \theta(\xi), \end{aligned}$$

gdy $a \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $u \in P$ i $\xi \in T_uP$.

**Ćwiczenie 3.3.13** Wykaż, że jeżeli $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ i $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, to:
(1) $\theta(B(\alpha)) = \alpha$,
(2) $(R_a)_\#(B(\alpha)) = B(a^{-1} \cdot \alpha)$,
(3) równość $B(\alpha)(u) = 0$ dla pewnego $u \in P$ implikuje równość $\alpha = 0$,
(4) $[X^*, B(\alpha)] = B(X \cdot \alpha)$.
(Tu oczywiście $X^*$ oznacza fundamentalne pole pionowe odpowiadające elementowi $X$, a $X \cdot \alpha$ jest zwykłym iloczynem macierzy i wektora w $\mathbb{R}^n$.)

Można się spodziewać, że określona powyżej forma $\theta$ ma też jakieś znaczenie geometryczne. Jak się wkrótce okaże, jest ona związana z tensorem skręcenia pochodnej kowariantnej $\nabla$ pochodzącej od koneksji $\mathcal{H}$. Stąd następująca

**Definicja 3.3.14** Zewnętrzną różniczkę kowariantną $\Theta = D\theta$ formy kanonicznej nazywamy *formą skręcenia* koneksji $\mathcal{H}$.

**Twierdzenie 3.3.15** *Zachodzi równość*

$$d\theta = \Theta - \omega \wedge \theta. \tag{3.3.11}$$

Tak jak w przypadku formy krzywizny (por. twierdzenie 3.3.10), wyjaśnijmy, że równość (3.3.11) oznacza, że dla dowolnych wektorów $\xi_1$ i $\xi_2$ z $T_uP$, $u \in P$, mamy

$$d\theta(\xi_1, \xi_2) = \Theta(\xi_1, \xi_2) - \omega(\xi_1) \cdot \theta(\xi_2) + \omega(\xi_2) \cdot \theta(\xi_1).$$

*Dowód.* Tak jak w dowodzie twierdzenia 3.3.10 rozważmy trzy przypadki.

(i) Jeżeli oba wektory $\xi_1$ i $\xi_2$ są poziome, to $\omega(\xi_1) = \omega(\xi_2) = 0$ i żądana równość wynika wprost z definicji zewnętrznej różniczki kowariantnej.

(ii) Jeżeli oba wektory $\xi_1$ i $\xi_2$ są pionowe, to $\theta(\xi_1) = \theta(\xi_2) = 0$, $\Theta(\xi_1, \xi_2) = 0$ (znowu na mocy określenia zewnętrznej różniczki kowariantnej) i $d\theta(\xi_1, \xi_2) = 0$, bo nawias Liego pól pionowych jest polen pionowym. Zatem, w tym przypadku obie strony żądanej równości zerują się.

(iii) Jeżeli $\xi_1 = B(\alpha)(u)$ jest wektorem poziomym, a $\xi_2 = X^*(u)$ — poziomym, to $\omega(\xi_1) = 0$, $\theta(\xi_2) = 0$, $\omega(\xi_2) = X$, $\theta(\xi_1) = \alpha$, $\Theta(\xi_1, \xi_2) = 0$,

$$d\theta(\xi_1, \xi_2) = -\theta([B(\alpha), X^*](u)) = \theta(B(X \cdot \alpha)(u) = X \cdot \alpha$$

i znowu żądana równość jest spełniona. $\square$

Równości (3.3.8) i (3.3.11) noszą nazwę *równań strukturalnych*, podczas gdy poniższa równość (3.3.12) — *pierwszej tożsamości Bianchi.*

**Twierdzenie 3.3.16** *Dla formy skręcenia* $\Theta$ *dowolnej koneksji mamy*

$$D\Theta = \Omega \wedge \theta. \tag{3.3.12}$$

*Dowód.* Z równania strukturalnego (3.3.11) otrzymujemy

$$0 = dd\theta = -d(\omega \wedge \theta) + d\Theta,$$

skąd

$$d\Theta = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta.$$

a ponieważ forma $\omega$ zeruje się na wektorach poziomych, zaś formy $\theta$ i $\Omega$ zerują się na wektorach pionowych, więc

$$\begin{aligned} D\Theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= d\Theta(h\xi_1, h\xi_2, h\xi_3) = (d\omega \wedge \theta)(h\xi_1, h\xi_2, h\xi_3) \\ &= (\Omega \wedge \theta)(h\xi_1, h\xi_2, h\xi_3) = (\Omega \wedge \theta)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned}$$

dla dowolnych wektorów $\xi_1$, $\xi_2$ $\xi_3 \in T_uP$, $u \in P = L(M)$. $\square$

Wreszcie, dla dowodu zapowiedzianych zależności pomiędzy tensorami i formami skręcenia i krzywizny potrzebny nam będzie następujący

**Lemat 3.3.17** *Jeżeli $X$ i $Y$ są polami wektorowymi na $M$, zaś $X^h$ i $Y^h$ — ich podniesieniami poziomymi do $P = L(M)$, to*

$$(\nabla_X Y)(x) = u(X^h(\theta(Y^h))(u)), \tag{3.3.13}$$

*gdzie $x \in M$, $u \in P$ i $p(u) = x$.*

Wyjaśnijmy najpierw, że $\theta(Y^h)$ jest tu układem $n = \dim M$ funkcji gładkich na $P$ i $X^h(\theta(Y^h))$ — układem ich pochodnych kierunkowych w kierunku pola $X^h$. Zatem, $X^h(\theta(Y^h))(u)$ jest elementem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a że bazę $u$ przestrzeni $T_xM$ traktujemy (jak już to robiliśmy) jako izomorfizm liniowy $\mathbb{R}^n \to T_xM$, więc $u(X^h(\theta(Y^h))(u))$ jest (tak jak i $(\nabla_X Y)(x)$) wektorem stycznym do $M$ w punkcie $x$.

*Dowód.* Rozważmy funkcję $f : P \to \mathbb{R}^n$ daną wzorem

$$f(v) = v^{-1}(Y(p(v))), \quad v \in P,$$

oraz krzywą $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taką, że $\gamma(0) = x$ i $\dot\gamma(0) = X(x)$. Niech $\gamma^h : (-\varepsilon, \varepsilon) \to P$ będzie takim poziomym podniesieniem krzywej $\gamma$, że $\gamma^h(0) = u$. Wtedy $\dot\gamma^h(0) = X^h(u)$,

$$X^h(u)f = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(\gamma^h(t)) - f(u)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\gamma^h(t)^{-1}(Y(\gamma(t))) - u^{-1}(Y(x))\big)$$

oraz

$$u(X^h(u)f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((u \circ \gamma^h(t)^{-1})(Y(\gamma(t))) - Y(x)\big).$$

Ponadto, z określenia przeniesienia równoległego w $TM$ i $L(M)$ wynika, że

$$\tau^{-1}_{\gamma|[0,t]}(Y(\gamma(t))) = u \circ \gamma^h(t)^{-1}(Y(\gamma(t))).$$

Wobec wzoru wzoru (2.10.16) otrzymujemy, że

$$\nabla_{X(x)} Y = u(X^h(f)). \tag{3.3.14}$$

Ponieważ bezpośrednio z określenia formy kanonicznej $\theta$ wynika, że $f = \theta(Y^h)$, więc równość (3.3.14) jest równoznaczna z tezą lematu. $\square$

**Twierdzenie 3.3.18** *Formy i tensory krzywizny i skręcenia dowolnej koneksji liniowej związane są wzorami*

$$T(v_1, v_2) = u(\Theta(v_1^h, v_2^h)), \tag{3.3.15}$$

$$R(v_1, v_2)v_3 = u(\Omega(v_1^h, v_2^h) \cdot u^{-1}(v_3)), \tag{3.3.16}$$

*gdzie $v_1, v_2, v_3 \in T_xM$, $x \in M$, $u \in P = L(M)$ jest bazą przestrzeni stycznej $T_xM$, zaś $v_i^h$, $i = 1, 2$, są podniesieniami poziomymi wektorów $v_i$ do przestrzeni $T_uP$.*

*Dowód.* Udowodnimy tu wzór (3.3.16) pozostawiając Czytelnikowi (analogiczny i nieco łatwiejszy) dowód wzoru (3.3.15) jako ćwiczenie.

Przedłużmy wektory $v_i$, $i = 1, 2, 3$, do gładkich pól wektorowych $X_i$ na $M$ i oznaczmy przez $Z_i$ ich podniesienia poziome na $P$. Oczywiście, $v_i^h = Z_i(u)$.

Określmy funkcję $f : P \to \mathbb{R}^n$ wzorem $f = \theta(Z_3)$. Na mocy określenia (2.10.7) tensora krzywizny i lematu 3.3.17 mamy

$$\begin{aligned} R(v_1, v_2)v_3 &= R(X_1, X_2)X_3\big|_x = \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3 - \nabla_{[X_1,X_2]}X_3\big|_x \\ &= u(X_1^h X_2^h f - X_2^h X_1^h f - h[X_1^h, X_2^h]f\big|_u) = u(v[X_1^h, X_2^h]f\big|_u), \end{aligned}$$

gdzie — jak zwykle — $h\xi$ i $v\xi$ oznacza odpowiednio część poziomą i część pionową wektora $\xi \in TP$.

Przyjmijmy

$$A = \omega([Z_1^h, Z_2^h](u))$$

i niech $(a_t)$ będzie jednoparametrową podgrupą grupy strukturalnej $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ generowaną przez $A$. Wtedy — na mocy równania strukturalnego (3.3.8) — zachodzi równość

$$A = -\Omega([Z_1^h, Z_2^h])(u).$$

Ponadto,

$$\begin{aligned} A^* f(u) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(u \cdot a_t) - f(u)) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(a_t^{-1} \cdot f(u) - f(u) = -A \cdot f(u). \end{aligned}$$

Zestawiając powyższe równości otrzymujemy (3.3.16). □

**Ćwiczenie 3.3.19** Wyprowadź wzór (3.3.15).

## 3.3.4 Redukcje i holonomia

Niech teraz $\mathcal{H}$ będzie koneksją liniową na $M$, $\omega$ jej formą koneksji, zaś $\nabla$ związaną z nią pochodną kowariantną. Ponadto, niech $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ($n = \dim M$) będzie podgrupą domkniętą, zaś $P \subset L(M)$ — $G$-strukturą na $M$.

**Definicja 3.3.20** Koneksja $\mathcal{H}$ jest *redukowalna* do $P$, gdy $\mathcal{H}(u) \subset T_u P$, dla wszystkich $u \in P$. Koneksja $\mathcal{H}$ jest *$G$-koneksją*, gdy istnieje $G$-struktura $P \subset L(M)$ taka, że $\mathcal{H}$ jest redukowalna do $P$.

Warunek redukowalności można wyrazić w terminach przeniesienia równoległego i formy koneksji jak następuje.

**Twierdzenie 3.3.21** *Następujące warunki są równoważne:*
*(i) koneksja jest redukowalna do $G$-struktury $P$,*
*(ii) przeniesienie równoległe w $L(M)$ wzdłuż dowolnej krzywej przekształca elementy $P$ w elementy $P$,*
*(iii) forma koneksji obcięta do wiązki $TP$ przyjmuje wartości w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ grupy strukturalnej $G$.*

*Dowód.* Jeżeli koneksja $\mathcal{H}$ jest redukowalna do $P$, to każda krzywa pozioma o początku w punkcie $u \in P$ jest cały czas styczna do $P$, zatem przebiega w $P$, co dowodzi implikacji (i) $\Rightarrow$ (ii).

Jeżeli przeniesienia równoległe zachowują $P$, $u \in P$, $\xi \in T_uL(M)$ jest wektorem poziomym, $x = p(u)$, $v = p_*(\xi) \in T_xM$ i $\gamma[0,1] \to M$ jest krzywą taką, że $\gamma(0) = x$ i $\dot\gamma(0) = v$, to podniesienie poziome $\tilde\gamma$ krzywej $\gamma$ o początku w $u$ przebiega całkowicie w $P$, zatem $\xi = \dot{\tilde\gamma}(0)$ jest wektorem stycznym do $P$, co dowodzi, że $\mathcal{H}(u) \subset TP$ i daje implikację (ii) $\Rightarrow$ (i).

Jeżeli koneksja $\mathcal{H}$ jest redukowalna do $P$, $\omega$ jest jej formą koneksji i $u \in P$, to $T_uP = \mathcal{H}(u) \oplus \{X^*(u); X \in \mathfrak{g}\}$, $\omega|\mathcal{H}(u) \equiv 0$ i $\omega(X^*) = X \in \mathfrak{g}$, gdy $X \in \mathfrak{g}$, a to dowodzi iż $\omega(T_uP) \subset \mathfrak{g}$ i daje implikację (i) $\Rightarrow$ (iii).

Wreszcie, jeżeli forma koneksji $\omega$ przyjmuje na $TP$ wartości z $\mathfrak{g}$ i $u \in P$, to $\dim\ker(\omega|T_uP) = \dim M = \dim\ker\omega(u)$, a że $\ker(\omega|T_uP) \subset \ker\omega(u)$, więc $\mathcal{H}(u) = \ker\omega(u) = \ker(\omega|T_uP) \subset T_uP$ i nasza koneksja jest redukowalna do $P$. Zatem, (iii) $\Rightarrow$ (i). □

Wybierzmy teraz ustalony element $u_0 \in L(M)$ i oznaczmy przez $P_0$ zbiór wszystkich $u \in L(M)$, które można połączyć z $u_0$ krzywą poziomą:

$$P_0 = \{\gamma(1); \gamma : [0,1] \to L(M), \gamma(0) = u_0 \text{ i } \dot\gamma(t) \in \mathcal{H}(\gamma(t)) \text{ dla wszystkich } t \in [0,1]\}.$$

Ponadto niech $H$ będzie zbiorem wszystkich macierzy $a \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, dla których istnieje $u \in P_0$ takie, że $p(u) = p(u_0)$ i $u = u_0 \cdot a$. Oczywiście, $H$ jest podgrupą grupy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Można wykazać (dowód tu pomijamy), że $H$ jest podgrupą domkniętą, jest więc grupą Liego. Nazywa się ją *grupą holonomii* koneksji $\mathcal{H}$. Pojęcie to jest dobrze zdefiniowane: grupy holonomii odpowiadające dwu wybranym punktom wiązki $L(M)$ są izomorficzne.

**Ćwiczenie 3.3.22** Wykaż, że grupy holonomii $H$ i $H'$ danej koneksji $\mathcal{H}$ na $M$ odpowiadające dwu punktom $u_0$ i $u_0'$ wiązki $L(M)$ są sprzężonymi podgrupami $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$: $H' = a \cdot H \cdot a^{-1}$ dla pewnego $a \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Można też wykazać (dowód znowu pomijamy), że $(P_0, M, H, p|P_0)$, gdzie $p : L(M) \to M$ jest naturalnym rzutowaniem, jest $H$-strukturą na $M$. Nazywamy ją *wiązką holonomii* koneksji $\mathcal{H}$. Tak jak grupa holonomii, tak i wiązka holonomii jest dobrze określona: wiązki holonomii $P_0$ i $P_0'$ odpowiadające dwu punktom $u_0$ i $u_0'$ wiązki $L(M)$ są izomorficzne w tym sensie, że istnieje dyfeomorfizm $\Phi : P_0 \to P_0'$ przekształcający jedną z nich na drugą, zachowujący włókna (tzn. taki, iż $p \circ \Phi = p$) i działania grup holonomii (tzn. taki, że $\Phi(u \cdot a) = \Phi(u) \cdot h(a)$ dla wszystkich $u \in P_0$, $a \in H$ i pewnego, ustalonego izomorfizmu $h : H \to H'$ odpowiednich grup holonomii). Z twierdzenia 3.3.21 wynika od razu następujący

**Wniosek 3.3.23** *Każda koneksja jest redukowalna do swej wiązki holonomii.*

Oznaczmy teraz przez $\mathfrak{h}$ algebrę Liego grupy holonomii $H$, zaś przez $\mathfrak{h}'$ podprzestrzeń liniową algbery $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ generowaną przez zbiór wszystkich wartości $\Omega(\xi_1, \xi_2)$, gdzie $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}(u)$, $u \in P_0$.

**Twierdzenie 3.3.24** $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$.

*Dowód.* Ponieważ $\Omega$ jest formą pseudotensorową, podprzestrzeń $\mathfrak{h}'$ jest $\mathrm{ad}(H)$-niezmiennicza, jest więc ideałem algebry $\mathfrak{h}$.

Określmy na wiązce holonomii $P_0$ dystrybucję $D$ w następujący sposób: jeżeli $u \in P_0$, , to $D(u)$ jest podprzestrzenią przestrzeni stycznej $T_u P_0$ generowaną przez wszystkie wektory poziome i wektory postaci $A^*(u)$, gdzie $A \in \mathfrak{h}'$. Oczywiście,

$$\dim D(u) = \dim M + \dim \mathfrak{h}'$$

dla wszystkich $u$.

Łatwo sprawdzić, że $D$ jest gładka. Wykażemy, że jest też inwolutywna, tzn. że nawias Liego dowolnych dwu pól $X_1$ i $X_2$ na $P_0$ o wartościach w $D$ jest polem o wartościach w $D$. Jeżeli $X_1 = A_1^*$ i $X_2 = A_2^*$ dla pewnych $A_1, A_2 \in \mathfrak{h}'$, to $[X_1, X_2] = [A_1, A_2]^*$ i $[A_1, A_2] \in \mathfrak{h}'$. Jeżeli $X_1$ i $X_2$ są poziome, to $[X_1, X_2]$ jest sumą pewnego pola poziomego i $A^*$, gdzie $A = \omega([X_1, X_2]) = -\Omega(X_1, X_2) \in \mathfrak{h}'$. Wreszcie, jeśli $X_1$ jest poziome i $X_2 = A_2^*$, to $[X_1, X_2]$ jest polem poziomym wobec $R_a$-niezmienniczości rozważanej koneksji. We wszystkich trzech przypadkach $[X_1, X_2]$ przyjmuje wartości w $D$.

Z twierdzenia Frobeniusa wynika, że dystrybucja $D$ jest całkowalna. Oznaczmy przez $P_0'$ jedną z jej maksymalnych podrozmaitości całkowych i wybierzmy dowolny punkt $u_0 \in P_0'$. Jeśli $u$ jest dowolnym punktem wiązki holonomii $P_0$, to $u$ można połączyć z $u_0$ krzywą poziomą, a że krzywa ta jest wszędzie styczna do $D$, więc $u \in P_0'$. W konsekwencji, $P_0' = P_0$, $\dim P_0' = \dim P_0$, $\dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. □

**Wniosek 3.3.25** *Grupa holonomii koneksji liniowej $\mathcal{H}$ jest dyskretna wtedy i tylko wtedy, gdy jej forma kryywizny (równoważnie, jej tensor krzywizny) znika tożsamościowo.* □

Na koniec, przypuśćmy, że mamy na $M$ koneksję płaską ($R = 0$) i dwie krzywe $\gamma_0$ i $\gamma_1$ o tym samym początku i końcu: $\gamma_i; [0,1] \to M$, $\gamma_i(0) = x$ i $\gamma_i(1) = y$ dla $i = 0, 1$. Przypuśćmy, że krzywe te są *homotopijne*, tzn. że istnieje odwzorowanie ciągłe (*homotopia*) $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ takie, że $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$, $H(s,0) = x$ i $H(s,1) = y$ dla wszystkich $s, t \in [0,1]$. Wtedy krzywa $\gamma : [0,1] \to M$ zdefiniowana wzorami $\gamma(t) = \gamma_0(2t)$ gdy $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ i $\gamma(t) = \gamma_1(2-2t)$ gdy $1/2 \leqslant t \leqslant 1$, jest krzywą zamkniętą o początku i końcu $x$. Jest ona homotopijna (w powyższym sensie) z krzywą stałą $\delta$, $\delta(t) = x$ dla wszystkich $t \in [0,1]$. Jeżeli $H$ jest homotopią krzywych $\gamma$ i $\delta$ oraz $c_s = H(s, \cdot)$ dla $s \in [0,1]$, to — wobec ciągłej zależności rozwiązań układów równań różniczkowych od współczynników — przeniesienia równoległe wzdłuż krzywych $c_s$ wyznaczają ciągłą krzywą $s \to a_s$ w grupie holonomii $H$: $\tau_{c_s}(u) = a_s \cdot u$, gdy $u$ jest ustalonym elementem wiązki $L(M)$ i $p(u) = x$. Ponieważ $H$ jest dyskretna, $c_1 = \delta$ i $a_1 = e$, więc $a_s = e$ dla wszystkich $s$. W szczególności, $a_0 = e$, skąd $\tau_\gamma = \mathrm{id}$ i $\tau_{\gamma_0} = \tau_{\gamma_1}$.

Udowodniliśmy w ten sposób następujący

**Wniosek 3.3.26** *Jeżeli $R = 0$, to przeniesienia równoległe wzdłuż krzywych homotopijnych są identyczne.* □

# Rozdział 4

# Geometria Riemanna lokalnie

## 4.1 Tensor Riemanna

Krótko mówiąc, tensor Riemanna na rozmaitości $M$ jest to funkcja $g : M \ni x \mapsto g(x)$ przyporządkowująca każdemu punktowi $x \in M$ iloczyn skalarny (tj., formę dwuliniową, symetryczną i dodatnio określoną) w przestrzeni stycznej $T_xM$, przy czym $g(x)$ zależy gładko od punktu $x$. Gładkość tego przyporządkowania polega na tym, że jeżeli $X$ i $Y$ są gładkimi polami wektorowymi na $M$, to funkcja

$$M \ni X \mapsto g(x)(X(x), Y(x))$$

jest gładka na $M$. Formalnie, przyjmujemy następującą definicję.

**Definicja 4.1.1** *Tensorem Riemanna* na rozmaitości $M$ nazywamy pole tensorowe $g$ typu $(0, 2)$ symetryczne i dodatnio określone, tj. takie, że $g(X, Y) = g(Y, X)$ dla dowolnych pól wektorowych $X$ i $Y$ na $M$ (symetria) i $g(X(x), X(x)) > 0$, gdy $X \in \mathcal{X}(M)$, $x \in M$ i $X(x) \neq 0$ (dodatnia określoność).

Przyjęte w rozdziale 2 założenia topologiczne (parazwartość) o rozmaitościach implikują istnienie tensorów Riemanna.

**Twierdzenie 4.1.2** *Na dowolnej rozmaitości $M$ istnieją tensory Riemanna.*

*Dowód.* Niech $\mathcal{A}$ będzie atlasem na $M$, $\mathcal{U}$ pokryciem otwartym wpisanym w pokrycie dziedzinami $D_\phi$ map $\phi \in \mathcal{A}$, zaś $\mathcal{F}$ gładkim rozkładem jedności podporządkowanym pokryciu $\mathcal{U}$. Dla dowolnego $f \in \mathcal{F}$ wybierzmy mapę $\phi^f = (\phi^f_1, \ldots, \phi^f_n) \in \mathcal{A}$ taką, że $\operatorname{supp} f \subset D_{\phi^f}$ i funkcje $g^f_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots n = \dim M$, określone i gładkie na $D_{\phi^f}$ oraz takie, iż macierz $[g^f_{ij}(x); i, j \leqslant n]$ jest symetryczna i dodatnio określona dla wszystkich punktów $x \in D_{\phi^f}$. Dla dowolnych pól wektorowych $X$ i $Y$ na $M$ przyjmijmy

$$g(X,Y) = \sum_{f\in\mathcal{F}} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^f X_i^f Y_j^f, \tag{4.1.1}$$

gdzie $X_i^f$ i $Y_j^f$ są współrzędnymi $X$ i $Y$ w bazie $(\partial/\partial\phi_i^f, i = 1,\dots,n)$ pól wektorowych na $D_{\phi^f}$: $X = \sum_i X_i^f \cdot (\partial/\partial\phi_i^f)$ i $Y = \sum_j Y_j^f \cdot (\partial/\partial\phi_j^f)$. Łatwo widać, że powyższy wzór określa tensor Riemanna na $M$. $\square$

Lokalnie, w dziedzinie $D_\phi$ dowolnej mapy $\phi$ na $M$, dowolny tensor Riemanna ma postać

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} d\phi_i \otimes d\phi_j,$$

gdzie $[g_{ij}]$ jest symetryczną i dodatnio określoną macierzą złożoną z funkcji gładkich (*współrzędnych tensora Riemanna*) $g_{ij}$. Innymi słowy,

$$g(X,Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j,$$

gdy $X = \sum_i X_i \cdot (\partial/\partial\phi_i)$ i $Y = \sum_j Y_j \cdot (\partial/\partial\phi_j)$ są dowolnymi polami wektorowymi na $D_\phi$. Wynika stąd, że dowolny tensor Riemanna na rozmaitości $M$ jest postaci (4.1.1). W szczególności, wzór

$$g(X,Y) = \sum_{i,j} \delta_{ij} X_i Y_j = \sum_i X_i Y_i,$$

gdzie $X = (X_1,\dots,X_n)$ i $Y = (Y_1,\dots,Y_n)$ określa tensor Riemanna na $\mathbb{R}^n$ zwany tu *standardowym.*

Ze względów "technicznych" będziemy często pisać

$$\langle X, Y\rangle$$

zamiast $g(X,Y)$. Tak jak w przypadku wektorów w dowolnej przestrzeni euklidesowej, będziemy pisali $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ i nazywali liczbę $\|v\|$ *długością* wektora $v \in TM$. Klasyczna nierówność Schwarza ma więc tu postać

$$|\langle v,w\rangle| \leqslant \|v\|\cdot\|w\|, \quad v,w \in T_xM,\ x\in M, \tag{4.1.2}$$

przy czym równość w (4.1.2) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $v,w \in T_xM$ są liniowo zależne.

Parę $(M,g)$, gdzie $g$ jest tensorem Riemanna na $M$, nazywamy *rozmaitością riemannowską*; mówimy też wtedy, że $g$ jest *strukturą riemannowską* na $M$. Odwzorowanie gładkie $F : M \to N$ pomiędzy dwiema rozmaitościami riemannowskimi nazywamy *izometrycznym*, gdy jego różniczka zachowuje iloczyn skalarny wektorów, tzn. gdy dla dowolnych wektorów $v$ i $w$ stycznych do $M$ w tym samym punkcie zachodzi równość

$$\langle F_*(v), F_*(w)\rangle_N = \langle v, w\rangle_M, \tag{4.1.3}$$

gdzie — jak łatwo się domyślić — $g_M = \langle\cdot,\cdot\rangle_M$ i $g_N = \langle\cdot,\cdot\rangle_N$ są tensorami Riemanna na $M$ i $N$. Z określenia wynika, że dla dowolnego $x \in M$ różniczka $F_*(x)$ przekształcenia izometrycznego ma rząd równy $m = \dim M$ nie przekraczający wymiaru $n$ rozmaitości $M$, że więc dowolne odwzorowanie izometryczne jest imersją. Jeśli $m = n$, to dowolne odwzorowanie izometryczne pomiędzy $M$ i $N$ jest lokalnym dyfeomorfizmem: każdy punkt $x \in M$ posiada otoczenie otwarte $U$ przekształcane poprzez $F$ dyfeomorficznie na otoczenie otwarte $F(U)$ punktu $F(x)$. Proste przykłady pokazują, że odwzorowania izometryczne nie muszą być (globalnie) różnowartościowe. Odwzorowanie izometryczne $F : M \to N$ nazywamy *izometrią*, gdy jest dyfeomorfizmem rozmaitości $M$ na $N$. Oczywiście, złożenie odwzorowań izometrycznych jest odwzorowaniem izometrycznym, złożenie izometrii jest izometrią, przekształcenie odwrotne do izometrii jest również izometrią. W konskewencji, zbiór $\mathcal{I}(M)$ wszystkich izometrii rozmaitości riemannowskiej $M$ na siebie jest grupą przekształceń. Można wykazać (dowód tu pomijamy), że $\mathcal{I}(M)$ posiada strukturę grupy Liego oraz, że

$$\dim \mathcal{I}(M) \leqslant \frac{n(n+1)}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = n + \dim \mathrm{SO}(n), \tag{4.1.4}$$

gdy $n = \dim M$. Równość w powyższej nierówności ma miejsce np. dla $M = \mathbb{R}^n$ ze standardowym tensorem Riemanna, tj. tensorem $g$ o współrzędnych $g_{ij}\delta_{ij}$ w mapie $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Jeśli $F : M \to N$ jest imersją, a $g_N$ jest tensorem Riemanna na $N$, to wzór

$$g_M(v, w) = g_N(F_*(v), F_*(w)), \quad v, w \in T_xM, x \in M,$$

określa tensor Riemanna na $M$. Nazywamy go *indukowanym* z $(N, g_N)$ i oznaczamy symbolem $F^*g_N$. Oczywiście $F$ przekształca izometrycznie $(M, F^*g_N)$ w $(N, g_N)$. Podobnie, jeśli $(M_1, g_1)$ i $(M_2, g_2)$ są dwoma romaitościami riemannowskimi i $M = M_1 \times M_2$, to wzór

$$g(v, w) = g_1(v_1, w_1) + g_2(v_2, w_2),$$

gdzie $v = v_1 + v_2$, $w = w_1 + w_2 \in T_xM$, $v_1, w_1 \in T_{x_1}M_1$, $v_2, w_2 \in T_{x_2}M_2$ i $x = (x_1, x_2) \in M$, określa tensor Riemanna $g$ na $M$ zwany *strukturą riemannowską produktową* i oznaczany często symbolem $g_1 \times g_2$; parę $(M, g)$ nazywamy wtedy *produktem riemannowskim* rozmaitości riemannowskich $(M_1, g_1)$, $(M_2, g_2)$. Dla dowolnych $x_1 \in M_1$ i $x_2 \in M_2$ odwzorowania

$$M_2 \ni y_2 \mapsto (x_1, y_2) \quad \text{i} \quad M_1 \ni y_1 \mapsto (y_1, x_2)$$

przekształcają izometrycznie odpowiednio $(M_2, g_2)$ i $(M_1, g_1)$ w $(M, g)$.

**Ćwiczenie 4.1.3** Wykaż, że grupa izometrii sfery jednostkowej $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ze standardowym tesorem Riemanna, tj. tensorem Riemanna indukowanym ze standardowego tensora Riemanna na $\mathbb{R}^{n+1}$ poprzez odwzorowanie tożsamościowe $\mathrm{id}_{S^n}$, jest izomorficzna z $\mathrm{O}(n+1)$.

W przypadku $\dim M > \dim N$ nie ma odwzorowań izometrycznych rozmaitości riemannowskiej $M$ w rozmaitość riemannowską $N$. Można jednak wyróżnić klasę odwzorowań zachowujących iloczyn skalarny wektorów w następującym sensie.

**Definicja 4.1.4** Submersję $F : M \to N$ ($\dim M \geqslant \dim N$) działającą pomiędzy rozmaitościami riemanowskimi $(M, g_M)$ i $(N, g_N)$ nazywamy *riemannowską*, gdy równość (4.1.3) zachodzi dla wszystkich wektorów $v$ i $w \in T_xM$, $x \in M$, prostopadłych do jądra $\ker F_{*x}$ różniczki odwzorowania $F$.

Oczywiście, naturalna projekcja $(x_1, \ldots x_m) \mapsto (x_1, \ldots x_n)$ $(m > n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^m$ na $\mathbb{R}^n$ (obie ze standardowymi tensorami Riemanna) jest submersją riemannowską.

Rozważmy teraz dwie sfery $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ i $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (z tensorami Riemanna wyznaczającymi struktury sfery jednostkowej na $S^3$ i sfery o promieniu $1/2$ na $S^2$) oraz odwzorowanie $F : S^3 \to S^2$ dane wzorem

$$F(z, w) = z \cdot \bar{w}. \tag{4.1.5}$$

Odwzorowanie to (a także rozkład sfery $S^3$ na włókna $F^{-1}(\{\zeta\}) \approx S^1$, $\zeta \in S^2$) nazywamy *rowzłóknieniem Hopfa*. Odwzorowanie $F$ można opisać w następujący sposób: wprowadźmy na $S^3$ współrzędne

$$(\sin(t)e^{i\theta_1}, \cos(t)e^{i\theta_2}),$$

gdzie $t \in (0, \pi/2)$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, zaś na $S^2$ współrzędne

$$(\frac{1}{2}\cos(2r), \frac{1}{2}\sin(2r)e^{i\theta}),$$

gdzie $r \in (0, \pi/2)$, $\theta \in \mathbb{R}$; wtedy

$$F : (\sin(t)e^{i\theta_1}, \cos(t)e^{i\theta_2}) \mapsto (\frac{1}{2}\cos(2r), \frac{1}{2}\sin(2r)e^{i(\theta_2 - \theta_1)}).$$

**Ćwiczenie 4.1.5** Wykaż, że rozwłóknienie Hopfa $S^3(1) \to S^2(\frac{1}{2})$ jest submersją riemannowską.

## 4.2 Struktury ortogonalne

Jeżeli $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ jest tensorem Riemanna na $n$-wymiarowej rozmaitości $M$ i $x \in M$, to bazę $u = (u_1, \ldots, u_n) \in L(M)$ przestrzeni stycznej $T_x M$ nazywamy *ortonormalną*, gdy $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ dla wszystkich $i, j \leqslant n$. Zbiór $\mathrm{O}(M)$ wszystkich baz ortonormalnych (dla wszystkich punktów $x \in M$) tworzy $\mathrm{O}(n)$-strukturę na $M$. Odwrotnie, jeżeli $\mathrm{O}(M) \subset L(M)$ jest $\mathrm{O}(n)$-strukturą na $M$, to wzór

$$g(v, w) = \sum_i v_i w_i,$$

gdzie $v = \sum_i v_i u_i$ i $w = \sum_i w_i u_i$ dla pewnej bazy $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{O}(M)$ określa jednoznacznie tensor Riemanna na $M$. Co więcej, jeżeli $M$ jest rozmaitością zorientowaną, to zbiór $\mathrm{O}^+(M)$ wszystkich ortogonalnych i dodatnio zorientowanych baz $u \in L(M)$ stanowi $\mathrm{SO}(n)$-stukturę na $M$. Odwrotnie, każda $\mathrm{SO}(n)$-struktura wyznacza zarówno orientację rozmaitości $M$ jak i tensor Riemanna na $M$. Mamy więc następujące

**Twierdzenie 4.2.1** *Tensory Riemanna i* $\mathrm{O}(n)$*-struktury na dowolnej rozmaitości* $M$ *pozostają we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości. Podobnie, na dowolnej zorientowanej rozmaitości* $M$ *we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości pozostają tensory Riemanna i* $\mathrm{SO}(n)$*-struktury.* □

Odwzorowanie $F : M \to N$ pomiędzy dwoma rozmaitościami riemannowskimi tego samego wymiaru $n$ jest izometryczne wtedy i tylko wtedy, gdy jego różniczka $F_*$ przekształca $\mathrm{O}(n)$-strukturę rozmaitości $M$ w $\mathrm{O}(n)$-strukturę rozmaitości $N$: $F_*(\mathrm{O}(M)) \subset \mathrm{O}(N)$. Obserwację tą można uogólnić na przypadek rozmaitości riemannowskich dowolnego wymiaru:

**Ćwiczenie 4.2.2** Podaj interpretację izometryczności przekształceń pomiędzy rozmaitościami riemannowskimi dowolnych wymiarów w terminach $G$-struktur (dla odpowiedniej grupy $G$). Zrób to samo dla submersji riemannowskich.

## 4.3 Koneksje riemannowskie

Jeżeli $(M, g)$, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, jest rozmaitością riemannowską i $\mathrm{O}(M) \subset L(M)$ jej $\mathrm{O}(n)$-strukturą, to koneksję liniową $\mathcal{H}$ (i związaną z nią pochodną kowariantną $\nabla$) nazywamy *riemannowską*, gdy jest ona redukowalna do $\mathrm{O}(M)$, tj. — przypomnijmy — gdy $\mathcal{H}(u) \subset T_u \mathrm{O}(M)$ dla wszystkich $u \in \mathrm{O}(M)$. Jeśli tak jest, to przeniesienie równoległe dowolnej bazy ortonormalnej $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{O}(M)$ wzdłuż dowolnej krzywej $\gamma$ na $M$ prowadzi do bazy ortonormalnej. Wynika stąd, że przeniesienie równoległe we wiązce stycznej $TM$ zachowuje długość wektora i — w konsekwencji — iloczyn skalarny $g$. Łatwo zauważyć, że prawdziwa jest też implikacja przeciwna: jeśli przeniesienie równoległe zachowuje iloczny skalarny, to rozważana koneksja jest riemannowska. Mamy więc następujący

**Lemat 4.3.1** *Koneksja liniowa $\nabla$ jest riemannowska wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn skalarny dowolnych pól równoległych wzdłuż dowolnej krzywej jest stały:*

$$\begin{aligned} \gamma:[0,1]\to M,\ X(t),Y(t)\in T_{\gamma(t)}M,\ \nabla_{\dot\gamma}X &= \nabla_{\dot\gamma}Y=0 \\ &\Rightarrow \langle X,Y\rangle=\text{const. } \textit{na } [0,1]. \end{aligned}$$

□

Jeśli teraz $u, v$ i $w$ są wektorami stycznymi do $M$ w punkcie $x$, $\gamma(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ krzywą taką, że $\gamma(0)=x$ i $\dot\gamma(0)=u$, zaś $V, W:(-\varepsilon,\varepsilon)\to TM$ polami wzdłuż $\gamma$ równoległymi i takimi, że $V(0)=v$ i $W(0)=w$, to przyjmując $U=\dot\gamma$ otrzymujemy

$$(\nabla_u g)(v,w)=U\langle V,W\rangle-\langle\nabla_U V,W\rangle-\langle V,\nabla_U W\rangle\big|_0=0 \tag{4.3.1}$$

bo $\langle V,W\rangle=\text{const.}$, $\nabla_U V=\nabla_U W=0$. Z dowolności $u, v$ i $w$ wynika, że $\nabla g=0$. Odwrotnie, jesli $\nabla g=0$, to równość (4.3.1) dowodzi, że w sytuacji opisanej powyżej $U\langle V,W\rangle=0$ i $\langle V,W\rangle=\text{const.}$ dla dowolnych pól równoległych $V$ i $W$ wzfdłuż dowolnej krzywej $\gamma$. Rozumowanie to razem z lematem 4.3.1 daje

**Twierdzenie 4.3.2** *Koneksja liniowa $\nabla$ na rozmaitości riemannowskiej $(M,g)$ jest riemannowska wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\nabla g=0. \tag{4.3.2}$$

□

Pośród wszystkich koneksji riemannowskich na $(M,g)$ jest jedna zasługująca na szczególną uwagę.

**Definicja 4.3.3** Koneksję $\nabla$ na rozmaitości riemannowskiej $(M,g)$ nazywamy *koneksją Levi-Civita*, gdy jest symetryczna ($T=0$) i riemannowska ($\nabla g=0$).

**Twierdzenie 4.3.4** *Na dowolnej rozmaitości riemannowskiej $(M,g)$ istnieje dokładnie jedna koneksja Levi-Civita $\nabla$.*

*Dowód.* Przypuśćmy, że taka koneksja $\nabla$ istnieje i weźmy dowolne trzy pola wektorowe $X, Y$ i $Z$ na $M$. Wtedy

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

$$Y\langle X,Z\rangle = \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle$$

oraz

$$Z\langle Y,X\rangle = \langle \nabla_Z Y, X\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle.$$

Odejmując ostatnią z pwyższych równości od sumy dwu pierwszych i korzystając z symetrii koneksji $\nabla$, tj. z równości

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,\ [Z,Y] = \nabla_Z Y - \nabla_Y Z \text{ i } [X,Z] = \nabla_X Z - \nabla_Z X,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle \\ &+ \langle Z,[X,Y]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Ponieważ tensor Riemanna $g$ jest niezdegenerowany, to dla dowolnych $X$ i $Y$ istnieje dokładnie jedno pole $\nabla_X Y$ spełniające (4.3.3) ze wszystkimi polami $Z$. Pozostaje sprawdzić (co zostawiamy Czytelnikowi w formie ćwiczenia poniżej), że tak określone przyporządkowanie $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ jest koneksją symetryczną i riemannowską. □

**Ćwiczenie 4.3.5** (i) Wykaż, że odwzorowanie $\nabla$ przyporządkowujące dowolnej parze $(X,Y)$ pól wektorowych $X$ i $Y$ na $M$ pole wektorowe $\nabla_X Y$ spełniające (4.3.3) ze wszystkimi polami wektorowymi $Z$ jest koneksją symetryczną ($T = 0$) i riemannowską ($\nabla g = 0$).

(ii) Wyznacz koneksję Levi-Civita na produkcie riemannowskim dwu rozmaitości riemannowskich $(M_1, g_1)$ i $(M_2, g_2)$.

Ze wzoru (4.3.3) zastosowanego do pól $X = \partial/\partial\phi_i$, $Y = \partial/\partial\phi_j$ i $Z = \partial/\partial\phi_k$ wynika, że symbole Christoffela (drugiego rodzaju) $\Gamma_{ij}^k$ pochodnej Levi-Civita $\nabla$ na rozmaitości riemannowskiej $(M,g)$ w mapie $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ można wyznaczyć ze współrzędnych $g_{ij}$ tensora Riemanna $g$ przy pomocy wzorów

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial\phi_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial\phi_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial\phi_l}\right), \tag{4.3.4}$$

gdzie $g^{ij}$ są wyrazami macierzy odwrotnej do $(g_{ij})$.

**Ćwiczenie 4.3.6** Wyznacz współrzędne Christoffela pochodnej Levi-Civita na sferze $S^n(r)$ (wyposażonej — jak zwykle — w tensor Riemanna indukowany przez naturalne włożenie $\mathrm{id}_{S^n(r)} : S^n(r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ze standardowego tensora Riemanna na $\mathbb{R}^{n+1}$) w mapie $\phi$ otrzymanej z rzutu stereograficznego (np. z "bieguna północnego" $x_0 = (0, \ldots, 0, 1)$).

## 4.4 Operatory

Z koneksjami i strukturami riemannowskimi związanych jest kilka naturalnych operatorów różniczkowych. Operatory takie działają na funkcjach, polach wektorowych czy tensorowych i mają tę własność, że nośnik obrazu takiej funkcji czy pola jest zawarty w nośniku tej własnie funkcji czy tego pola: $\operatorname{supp} D(T) \subset \operatorname{supp}(T)$, gdy $D$ jest operatorem różniczkowym, a $T$ dowolnym elementem jego dziedziny. Można wykazać — co wykracza poza ramy tego wykładu — że jeśli $D$ jest takim operatorem i $T$ elementem jego dziedziny, to $D(T)$ można lokalnie opisać przy pomocy współrzędnych pola $T$ (w dowolnej mapie) i ich pochodnych cząstkowych rzędu skończonego. Najwyższy rząd pochodnej pojawiającej się w tym opisie nie zależy od wyboru mapy i nazywa się *rzędem* operatora $D$.

I tak, jeśli $\nabla$ jest dowolną koneksją liniową na rozmaitości $M$, to *dywergencją* pola wektorowego na $M$ nazywamy funkcję $\operatorname{Div} X = \operatorname{Trace}(Y \mapsto \nabla_Y X)$. Jeśli więc $(X_1, \dots X_n)$ jest lokalną bazą pól wektorowych na $M$ i $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ dualną doń bazą 1-form (tj., przypomnijmy, $\omega_j(X_i) = \delta^i_j$ dla wszystkich $i, j \leqslant n$), to

$$\operatorname{Div} X = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\nabla_{X_i} X). \tag{4.4.5}$$

Jeśli rozmaitość $M$ jest wyposażona też w tensor Riemanna, a baza $(X_1, \dots, X_n)$ jest ortonormalna (tj., przypomnijmy, $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ dla wszystkich $i, j \leqslant n$), to wzór (4.4.5) przyjmuje postać

$$\operatorname{Div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} X, X_i \rangle. \tag{4.4.6}$$

Tradycyjnie, pola wektorowe o zerowej dywergencji nazywa się *bezźródłowymi.* Operator Div można rozszerzyć do dowolnych pól tensorowych typu $(r, s)$, najpierw z $r > 0$. Jeśli $T$ jest takim polem, to odwzorowanie $X \mapsto \nabla_X T$ jest polem typu $(r, s+1)$ i można dokonać jego kontrakcji (po $X$ i np. pierwszym czynniku we wiązce $T^{rs}(M)$), a wynik oznaczyć symbolem $\operatorname{Div}(T)$; $\operatorname{Div}(T)$ jest więc polem tensorowym typu $(r-1, s)$. Struktura riemannowska $g$ na $M$ daje naturalny (oznaczany nadal przez $g$) izomorfizm wiązek $TM$ i $T^*M$: dowolnemu wektorowi $v \in TM$ przypisuje on 1-formę $g(v, \cdot)$. Izomorfizm ten pozwala utożsamić dowolne pole tensorowe $S$ typu $(0, s)$ $(s > 0)$ z polem $\tilde{S}$ typu $(1, s-1)$: jeśli $S(x) = \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_s$ dla pewnych elementów $\omega_i \in T^*_x M$, to $\tilde{S}(x) = g^{-1}(\omega_1) \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_s$. W tej sytuacji można więc określić też dywergencję $\operatorname{Div}(S)$ pól $S$ typu $(0, s)$ z $s > 0$: $\operatorname{Div}(S) = \operatorname{Div}(\tilde{S})$.

Jeśli $\nabla$ jest koneksją Levi-Civita na zorientowanej rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$, zaś $\Omega$ jest riemannowską formą objętości na $M$, tzn. dla dowolych pól wektorowych $X_1, \dots X_n$ na $M$ mamy

$$\Omega(X_1, \dots X_n) = \det(\langle X_i, E_j \rangle; i, j \leqslant n), \tag{4.4.7}$$

gdy $(E_1, \ldots, E_n)$ jest lokalną, ortonormalną, dodatnio zorientowaną bazą pól wektorowych, to

$$\mathcal{L}_X \Omega = \operatorname{Div} X \cdot \Omega. \tag{4.4.8}$$

Ze wzoru tego i ćwiczenia 2.8.3 wynika stosunkowo łatwo następujące

**Twierdzenie 4.4.1** *Potok $(\phi_t)$ pola wektorowego $X$ na rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$ zachowuje formę objętości $\Omega$ (tj. $\phi^*\Omega = \Omega$ dla wszystkich $t$) wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{Div} X = 0$. □

Z twierdzenia Stokesa oraz wzorów (2.9.8) i (4.4.8) wynika natychmiast

**Wniosek 4.4.2** *Jeżeli $(M, g)$ jest zwartą rozmaitością riemannowską bez brzegu i $X \in \mathcal{X}(M)$, to*

$$\int_M \operatorname{Div} X \cdot \Omega = 0, \tag{4.4.9}$$

*gdzie $\Omega$ jest formą objętości na $(M, g)$.* □

**Ćwiczenie 4.4.3** (1) Udowodnij, że

$$\operatorname{Div}(fX) = f \operatorname{Div} X + X(f),$$

gdy $f$ jest funkcją gładką, a $X$ polem wektorowym.

(2) Wyprowadź wzór (4.4.8) i udowodnij szczegółowo twierdzenie 4.4.1.

(3) Opisz operator Div we współrzędnych lokalnych. Ile wynosi jego rząd ?

Jeśli teraz $(M, g)$ jest rozmaitością riemannowską i $f \in C^\infty(M)$, to istnieje dokładnie jedno pole wektorowe $\nabla f$ na $M$ spełniające warunek

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f) \tag{4.4.10}$$

dla wszystkich pól wektorowych $X$ na $M$. Istotnie, tensor Riemanna $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest dwuformą niezdegenerowaną, a przyporządkowanie $X \mapsto X(f)$ (różniczka funkcji $f$) jest liniowe. Pole $\nabla f$ nazywa się *gradientem* funkcji $f$.

**Ćwiczenie 4.4.4** (1) Udowodnij, że dla dowolnych funkcji gładkich $f$ i $h$ na $M$ zachodzi równość (*wzór Leibniza*)

$$\nabla(fh) = f \nabla h + h \nabla f.$$

(2) Wyznacz rząd operatora "gradient" i uzasadnij następujące stwierdzenie: pole $\nabla f$ (odpowiednio, $-\nabla f$) wyznacza kierunek najszybszego wzrostu (odpowiednio, malenia) funkcji $f$.

Jeśli $\nabla$ jest znowu koneksją Levi-Civita na rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$, to *hesjan* $H_f$ (lub, $h_f$) dowolnej funkcji gładkiej $f$ na $M$ jest zdefiniowany jako pole tensorowe typu $(1, 1)$ dane wzorem

$$H_f(X) = \nabla_X \nabla f, \quad X \in \mathcal{X}(M), \tag{4.4.11}$$

(lub odpowiadające mu pole tensorowe typu $(0, 2)$ dane wzorem

$$h_f(X, Y) = \langle H_f(X), Y \rangle), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{4.4.12}$$

**Ćwiczenie 4.4.5** Wykaż, że

(1) hesjan $H_f$ jest tensorem samosprzężonym względem $g$, tzn. że pole $h_f$ jest symetryczne,

(2) jeśli $x \in M$ jest punktem krytycznym funkcji $f$ (tj. $\nabla f(x) = 0$), to $h_f(X, Y) = X(Yf)(x) = Y(Xf)(x)$.

(3) jeśli forma dwuliniowa $(X, Y) \mapsto \langle \nabla_X Z, Y \rangle$ jest symetryczna, to dowolny punkt rozmaitości $M$ posiada otoczenie, na którym istnieje funkcja gładka $f$ taka, że $Z = \nabla f$.

Zauważmy tutaj, że nie wszystkie pola wektorowe mogą być gradientami funkcji gładkich. Na przykład, jeśli pole $Z = \nabla f$ na $M$ posiadałoby zamkniętą trajektorię $\gamma : [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, to mielibyśmy

$$0 = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 df(\dot{\gamma}(t)dt = \int_0^1 \|Z(\gamma(t)|^2 dt > 0,$$

sprzeczność. Zatem, pola wektorowe posiadające zamknięte trajektorie nie mogą być gradientami funkcji (względem jakiejkolwiek metryki riemannowskiej). Podobnie, gradientami nie mogą być pola posiadające tzw. *cykle*, tj. skończone układy $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ osobliwości "połączonych" trajektoriami $\gamma_i : \mathbb{R} \to M$ takimi, że $\lim_{t\to-\infty} \gamma_i(t) = x_i$ oraz $\lim_{t\to+\infty} \gamma_i(t) = x_{i+1}$ dla $i = 0, 1, \ldots, k$ (gdzie oczywiście $x_{k+1} = x_0$).

Wreszcie, *laplasjan* $\triangle f$ funkcji gładkiej $f$ na rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$ definiuje się jako ślad hesjanu $H_f$. Innymi słowy,

$$\triangle f = \operatorname{Div} \nabla f. \tag{4.4.13}$$

Zatem, wniosek 4.4.2 implikuje, że

$$\int_M \triangle f \Omega = 0,$$

gdy $M$ jest zwarta (bez brzegu) i orientowalna, $f \in C^\infty(M)$ i $\Omega$ jest — jak poprzednio — formą objętości na $(M, g)$. Operator Laplace'a $\triangle$ jest *eliptyczny* (drugiego rzędu), tj. lokalnie (w mapie $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$) wyraża się w postaci

$$\triangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial\phi_i \partial\phi_j},$$

gdzie $(a_{ij})$ jest dodatnio określoną macierzą funkcji gładkich. Teoria operatorów eliptycznych jest doskonale znana, ale wykracza poza ramy tego wykładu. Na przykład, wiadomo że *spektrum* $\mathrm{Spectr}(D)$ takiego operatora $D$ (tj. zbiór wszystkich jego *wartości własnych* czyli takich liczb $\lambda \in \mathbb{R}$, dla których istnieje element $T$ z dziedziny $D$ niezerowy i taki, że

$$D(T) = \lambda \cdot T) \tag{4.4.14}$$

jest dyskretne, a *podprzestrzenie własne* (tj. zbiory rozwiązań równania (4.4.14) dla $\lambda \in \mathrm{Spectr}(D)$) są skończonego wymiaru. Uwagi te dotyczą oczywiście operatora Laplace'a $\triangle$. Poniważ $\triangle$ jest operatorem liniowym, jedną z jego wartości własnych jest zero; funkcje $f$ spełniające równanie

$$\triangle f = 0 \tag{4.4.15}$$

nazywa się *harmonicznymi*. Ponieważ (por. ćwiczenie 4.4.7 poniżej)

$$\triangle f^2 = 2f\triangle f + 2\|\nabla f\|^2, \tag{4.4.16}$$

więc z wniosku 4.4.2 wynika łatwo

**Wniosek 4.4.6** *Na dowolnej spójej i zwartej rozmaitości riemannowskiej wszystkie funkcje harmoniczne są stałe, a wszystkie wartości własne operatora Laplace'a są niedodatnie.*

**Ćwiczenie 4.4.7** (1) Wykaż, że dla dowolnych funkcji gładkich $f$ i $h$ zachodzi wzór

$$\triangle(fh) = f\triangle h + h\triangle f + 2\langle\nabla f, \nabla h\rangle.$$

(2) Wykaż, że jeśli wszystkie współczynniki Christoffela $\Gamma_{ij}^k$ koneksji Levi-Civita w pewnej mapie $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ zerują się w pewnym punkcie $x$, to dla dowolnej funkcji $f$ mamy

$$\triangle f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial\phi_i^2}(x).$$

(Zatem, nasz laplasjan $\triangle$ jest naturalnym uogólnieniem laplasjanu znanego z wykładów analizy.)

## 4.5 Krzywizny

Niech $\nabla$ będzie znowu koneksją Levi-Civita na rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$, zaś $R$ — tensorem krzywizny koneksji $\nabla$. Zatem, $R$ jest polem tensorowym typu $(1, 3)$ danym — przypomnijmy — dla dowolnych pól wektorowych $X, Y$ i $Z$ wzorem

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Z tensorem $R$ związane jest (poprzez $g$) pole tensorowe typu $(0, 4)$ oznaczane też symbolem $R$ i nazywane też *tensorem krzywizny (riemannowskiej)*, a określone wzorem

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle, \tag{4.5.1}$$

gdzie $X, Y, Z$ i $W$ sa dowolnymi polami wektorowymi na $M$. Pole to posiada kilka własności symetrii ważnych dla dalszego ciągu wykładu:

**Lemat 4.5.1** *Określone powyżej pole tensorowe $R$ (typu $(0, 4)$ spełnia (dla dowolnych pól wektorowych $X, Y, Z$ i $W$) warunki*
*(i)* $R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, Z, W)$,
*(ii)* $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$,
*(iii)* $R(X, Y, W, Z) = -R(X, Y, Z, W)$,
*(iv)* $R(Z, W, X, Y) = R(X, Y, Z, W)$.

*Dowód.* Warunek (i) wynika natychmiast z określenia (4.5.1) tensora $R$, a (ii) — z tegoż określenia i tożsamości Bianchi (2.10.11). Dla dowodu równości (iii) wystarczy pokazać, że $R(X, Y, Z, Z) = 0$ dla dowolnych $X, Y$ i $Z$. Wobec tego, że $R$ jest tensorem, wystarczy wykazać tę ostatnią równość dla pól przemiennych, tj. takich, iż $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. W tym przypadku, $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ i $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$. Ponieważ $\nabla$ jest riemannowska, więc

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle &= X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle \\ &= \frac{1}{2} XY\langle Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle.\end{aligned}$$

Podobnie,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle &= Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle \\ &= \frac{1}{2} YX\langle Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle.\end{aligned}$$

Odejmując te równości stronami otrzymujemy

$$R(X, Y, Z, Z) = \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z\rangle = 0.$$

Wreszcie, (iv) jest czysto algebraiczną konsekwencją warunków (i) – (iii). $\square$

**Ćwiczenie 4.5.2** (1) Wyprowadź (iv) z (i) – (iii).

(2) Sprawdź, że pole $R$ dane wzorem

$$R(X,Y,W,Z) = K \cdot (\langle X,Z\rangle \cdot \langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle \cdot \langle Y,Z\rangle)\,, \tag{4.5.2}$$

gdzie $K$ jest dowolną stałą rzeczywistą ma własności (i) – (iv) z powyższego lematu.

Wybierzmy teraz punkt $x$ rozmaitości riemannowskiej $(M,g)$ i dwuwymiarową podprzestrzeń $P$ przestrzeni stycznej $T_xM$. Zauważmy, że powyższe własności (i) – (iv) tensora krzywizny powodują, iż wielkość

$$K(P) = \frac{R(v,w,w,v)}{\langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}, \tag{4.5.3}$$

gdzie $v, w$ są liniowo niezależnymi wektorami z $P$, nie zależy od wyboru wektorów $v$ i $w$. (Odnotujmy, że mianownik po prawej stronie (4.5.3) jest równy kwadratowi pola równoległoboku rozpiętego na $v$ i $w$ mierzonego przy pomocy iloczynu skalarnego $g(x)$.) Pozwala to przyjąć następujące określenie.

**Definicja 4.5.3** Liczbę $K(P)$ określoną wzorem (4.5.3) nazywamy *krzywizną sekcyjną* rozmaitości $(M,g)$ (w kierunku płaszczyzny $P$).

**Ćwiczenie 4.5.4** Wykaż, że krzywizna sekcyjna $K(P)$ produktu riemannowskiego rozmaitości riemannowskich $(M_1,g_1)$ i $(M_2,g_2)$ pokrywa się z krzywizną sekcyjną $K_i(P)$ rozmaitości $(M_i,g_i)$, gdy płaszczyzna $P$ jest zawarta w przestrzeni stycznej do $M_i$ $(i=1,2)$, zaś $K(P)=0$ gdy $P \subset T_{(x_1,x_2)}M$ jest rozpięta przez wektory $v_1 \in T_{x_1}M_1$ i $v_2 \in T_{x_2}M_2$.

**Ćwiczenie 4.5.5** (1) Wykaż, że $K(P) = K$ dla wszystkich płaszczyzn $P \subset TM$ wtedy i tylko wtedy, gdy tensor krzywizny $R$ dany jest wzorem (4.5.2).

(2) Udowodnij tzw. *lemat Schura*: Jeżeli rozmaitość $M$ jest spójna, $\dim M \geqslant 3$ i krzywizna sekcyjna $K(P)$ zależy tylko od punktu $x$ styczności płaszczyzny $P$ z $M$, to $K \equiv \text{const.}$ (Wskazówka: Wykaż najpierw, że $R$ jest postaci (4.5.2), gdzie $K$ jest pewną funkcją rzeczywistą na $M$, a następnie skorzystaj z tożsamości Bianchi (2.10.11), by wykazać że $X(K) \equiv 0$ dla dowolnego pola wektorowego $X$ na $M$.)

Oczywiście, wspomniany powyżej lemat Schura nie zachodzi na rozmaitościach dwuwymiarowych: istnieją dwuwymiarowe rozmaitości riemannowskie o krzywiźnie różnej od stałej.

Dla dowolnych dwu wektorów $v$ i $w \in T_xM$, $x \in M$, można rozważać również ślad Ric endomorfizmu $T_xM \ni u \mapsto R(u,v)w$:

$$\mathrm{Ric}(v,w) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, v, w, e_i), \tag{4.5.4}$$

gdzie $(e_1, \dots, e_n)$ jest ortonormalną bazą przestrzeni stycznej $T_xM$. Oczywiście, Ric jest polem tensorowym typu $(0, 2)$, a własności tensora krzywizny $R$ opisane w lemacie 4.5.1 implikują symetrię tensora Ric: $\mathrm{Ric}(v, w) = \mathrm{Ric}(w, v)$ dla dowolnych $v$ i $w$.

**Definicja 4.5.6** Pole tensorowe Ric nazywamy *tensorem Ricciego* na rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$, zaś liczbę $\mathrm{Ric}(v)$ zdefiniowaną dla dowolnego wektora niezerowego $v \in TM$ jako $\mathrm{Ric}(v, v)/\|v\|^2$ — jej *krzywizną Ricciego* w kierunku wektora $v$. Rozmaitość o stałej krzywiźnie Ricciego nazywa się często *rozmaitością Einsteina*.

Z powyższego określenia krzywizny Ricciego wynika, że jeśli $v \in T_xM$, to liczba $\mathrm{Ric}(v)$ jest równa sumie krzywizn głównych $K(P_i)$, $i = 1, \dots n-1$, w kierunku płaszczyzn $P_i \subset T_xM$ rozpiętych na $v$ i $e_i$, gdzie $(e_1, \dots, e_{n-1})$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni $v^\perp \subset T_xM$ złożonej ze wszystkich wektorów prostopadłych do $v$. Zatem, każda rozmaitość riemannowska o stałej krzywiźnie sekcyjnej $c$ jest rozmaitością Einsteina: $\mathrm{Ric}(v) = (\dim M - 1)c$ dla dowolnego $v$. Łatwo się domyślić, że odwrotnie nie jest: istnieją rozmaitości Einsteina, których krzywizna sekcyjna nie jest stała (patrz ćwiczenie 4.5.7 poniżej).

Wreszcie, ślad $S$ (względem $g$) tensora Ric nazywa się *krzywizną skalarną* rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$:

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i, e_i), \tag{4.5.5}$$

gdy $(e_1, \dots, e_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni stycznej $T_xM$, $x \in M$. Oczywiście, $S$ jest funkcją gładką (więc, polem tensorowym typu $(0, 0)$) na $M$. Jeżeli rozmaitość riemannowska $(M, g)$ ma stałą krzywiznę sekcyjną $c$ (lub tylko stałą krzywiznę Ricciego $C$), to i jej krzywizna skalarna $S$ jest stała: $S = n(n-1)c$ (lub $S = nC$), gdzie $n = \dim M$. Jak poprzednio, istnieją rozmaitości riemannowskie o stałej krzywiźnie skalarnej, które nie są rozmaitościami Einsteina.

**Ćwiczenie 4.5.7** (i) Wykaż, że produkt riemannowski sfer $S^k(r) \times S^m(\rho)$ (wyposażonych w naturalne struktury riemannowskie indukowane ze standardowych struktur na — odpowiednio — $\mathbb{R}^{k+1}$ i $\mathbb{R}^{m+1}$) jest rozmaitością Einsteina wtedy i tylko wtedy, gdy $(k-1) \cdot \rho^2 = (m-1) \cdot r^2$.

(ii) Wyznacz — dla dowolnych $k, m, r$ i $\rho$ — krzywiznę skalarną produktu sfer $S^k(r) \times S^m(\rho)$.

## 4.6 Wierność

Odwzorowanie $F$ między rozmaitościami riemannowskimi nazywamy *konforemnym* lub *wiernym*, gdy zachowuje kąty między krzywymi. Dokładniej, przyjmujemy następujące określenie.

**Definicja 4.6.1** Dwie struktury riemannowskie $g$ i $\tilde{g}$ na rozmaitości $M$ nazywamy *konformenie równoważnymi*, gdy istnieje funkcja gładka $\phi : M \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\tilde{g} = e^{2\phi} \cdot g. \tag{4.6.1}$$

Imersja $F$ rozmaitości riemannowskiej $(M, g_M)$ w rozmaitość riemannowską $(N, g_N)$ jest nazywana *odwzorowaniem konforemnym* (lub, *wiernym*), gdy metryka riemannowska $F^*g_N$ jest konforemnie równoważna z $g_M$.

Wszystkie konforemne dyfeomorfizmy rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$ tworzą grupę $\mathcal{C}(M)$.

Relacja konforemnej równoważności struktur riemannowskich jest oczywiście relacją równoważności (tzn., jest zwrotna, symetryczna i przechodnia). Klasy abstrakcji tej relacji nazywamy *strukturami konforemnymi* na danej rozmaitości. Ze strukturą taką związana jest w naturalny sposób redukcja $P$ wiązki liniowej $L(M)$ do grupy $\mathbb{R}^+ \times \mathrm{O}(n)$, gdzie $n = \dim M$, a $\mathbb{R}^+$ oznacza multiplikatywną grupę liczb rzeczywistych dodatnich: baza $u = (u_1, \dots, u_n)$ przestrzeni stycznej $T_xM$ należy do $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $u_j$ są ortonormalne względem pewnej struktury riemannowskiej z rozważanej klasy abstrakcji. Odwrotnie, taka redukcja $P$ wyznacza strukturę konforemną. Tensor Riemanna ją reprezentujący można skonstruować podobnie jak w dowodzie twierdznia 4.1.2. Pokryjmy $M$ zbiorami otwartymi $U_i$ takimi, że dla dowolnego $i$ istnieją na $U_i$ pola wektorowe $X_{1,i}, \dots, X_{n,i}$ liniowo niezależne i takie, że $(X_{1,i}(x), \dots, X_{n,i}(x))) \in P$ dla wszystkich $x \in M$. Zdefiniujmy tensory Riemanna $g_i$ na $U_i$ przyjmując, że pola $X_{1,i}, \dots, X_{n,i}$ są $g_i$-ortonormalne, weźmy gładki rozkład jedności $(f_a)$ podporządkowany pokryciu $(U_i)$ i połóżmy (rozumiejąc sumę tak jak w dowodzie wspomnianego już twierdzenia 4.1.2)

$$g = \sum_a f_a g_{i(a)},$$

gdzie $a \mapsto i(a)$ jest przyporządkowaniem wpisującym rodzinę $\{\operatorname{supp} f_a\}$ w pokrycie $\{U_i\}$ (tj., $\operatorname{supp} f_a \subset U_{i(a)}$ dla wszystkich $a$). Zatem struktura konforemna to $G$-struktura z $G = \mathbb{R}^+ \times \mathrm{O}(n)$. Wyjaśnijmy, że można użyć tu terminu $G$-struktura, gdyż grupę $G$ można traktować jako podgrupę grupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ złożoną ze wszystkich macierzy $A$, dla których $A \cdot A^\top = \lambda \cdot I$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}^+$, a $I$ oznacza macierz jednostkową.

Wzór (4.3.3) w dowodzie twierdzenia 4.3.4 pozwala wyprowadzić związek między koneksjami Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ i $\nabla$ na rozmaitościach riemannowskich $(M, \tilde{g})$ i $(M, g)$ z tensorami Riemanna związanymi wzorem (4.6.1): dla dowolnych pól wektorowych $X$ i $Y$ na $M$ zachodzi równość

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (X\phi)Y + (Y\phi)X - \langle X, Y \rangle \cdot \nabla\phi, \tag{4.6.2}$$

gdzie $g = \langle \cdot , \cdot \rangle$ i $\nabla\phi$ oznacza gradient funkcji $\phi$ na $(M, g)$. Z równości (4.6.2) i wzoru (2.10.7) definiującego tensor krzywizny można wyprowadzić z kolei związek między tensorami krzywizny $R$ i $\tilde{R}$ na $(M, g)$ i $(M, \tilde{g})$:

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + h_\phi(X,Z)Y - h_\phi(Y,Z)X + \\ \langle X,Z\rangle H_\phi(Y) - \langle Y,Z\rangle H_\phi(X) & \\ &+ \left(\langle Y,\nabla\phi\rangle \cdot \langle Z,\nabla\phi\rangle - \langle Y,Z\rangle \cdot \|\nabla\phi\|^2\right)\cdot X \\ &- \left(\langle X,\nabla\phi\rangle \cdot \langle Z,\nabla\phi\rangle - \langle X,Z\rangle \cdot \|\nabla\phi\|^2\right)\cdot Y \\ &+ \left(\langle \nabla\phi, X\rangle \cdot \langle Y,Z\rangle - \langle \nabla\phi, Y\rangle \cdot \langle X,Z\rangle\right)\cdot \nabla\phi\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

oraz — posiłkując się dodatkowo definicją 4.5.3 krzywizny sekcyjnej — związek pomiędzy krzywiznami sekcyjnymi w kierunku płaszczyzny $P$ rozpiętej na $g$-ortonormalnej parze $(v, w)$ wektorów stycznych:

$$\begin{aligned}\tilde{K}(P) = e^{-2\phi}\cdot\big(K(P) &- h_\phi(v,v) - h_\phi(w,w) \\ &- \|\nabla\phi\|^2 + \langle\nabla\phi, v\rangle^2 + \langle\nabla\phi, w\rangle^2\big).\end{aligned} \tag{4.6.4}$$

Powyżej — jak łatwo odgadnąć — $\nabla\phi$ oznacza gradient, a $h_\phi$ i $H_\phi$ — hesjan funkcji $\phi$ względem tensora Riemanna $g$. Wzór (4.6.4) upraszcza się znakomicie w przypadku rozmaitości dwuwymiarowych, dla których przyjmuje postać

$$\tilde{K} = e^{-2\phi}\left(K - \triangle\phi\right), \tag{4.6.5}$$

gdzie z kolei $\triangle$ oznacza operator Laplace'a na $(M, g)$.

**Ćwiczenie 4.6.2** Wyprowadź wzory (4.6.2), (4.6.3), (4.6.4) i (4.6.5).

Zmiana konforemna struktury riemannowskiej pozwala skonstruować w obszarach przestrzeni $\mathbb{R}^n$ metryki o stałej krzywiźnie, zarówno dodatniej jak i ujemnej. W tym celu, oznaczmy przez $g_0$ standardowy tensor Riemanna w $\mathbb{R}^n$ i przyjmijmy dla dowolnego $c \neq 0$

$$f_c(x) = \frac{4}{(1 + c\|x\|^2)^2} \tag{4.6.6}$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ dla których mianownik w (4.6.6) jest dodatni. Przyjmijmy

$$g_c = f_c \cdot g_0$$

i oznaczmy przez $M_c$ całe $\mathbb{R}^n$, gdy $c > 0$, zaś kulę $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < \sqrt{-c}\}$, gdy $c < 0$.

**Ćwiczenie 4.6.3** Wyznacz $g_0$-gradient i $g_0$-hesjan funkcji $f_c$. Wykaż — stosując wzór (4.6.4) — że $(M_c, g_c)$ jest rozmaitością riemannowską o stałej krzywiźnie sekcyjnej równej $c$.

# Rozdział 5

# Pierwsza globalizacja

## 5.1 Wariacja długości

### 5.1.1 Wzory wariacyjne

Niech $(M, g)$ będzie znowu rozmaitością riemannowską, zaś $\nabla$ — koneksją Levi-Civita na $M$. Dla dowolnej krzywej gładkiej $\gamma : [a, b] \to M$, liczbę

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \tag{5.1.1}$$

nazywamy jej *długością*. Krzywą $\gamma : [a, b] \to M$ nazywamy *kawałkami gładką*, gdy istnieją punkty podziału $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$ przedziału $[a, b]$ takie, że wszystkie $\gamma_i = \gamma|[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, są krzywymi gładkimi. Długość $L(\gamma)$ takiej krzywej określa się wzorem

$$L(\gamma) = \sum_{i=0}^{m-1} L(\gamma_i). \tag{5.1.2}$$

**Ćwiczenie 5.1.1** (1) Sprawdź czy powyższe określenie długości krzywej kawałkami gładkiej jest poprawne, tj. czy $L(\gamma)$ nie zależy od wyboru punktów $t_i$ podziału przedziału $[a, b]$.

(2) Wykaż, że jeśli $\gamma : [a, b] \to M$ jest krzywą gładką, zaś $h : [c, d] \to [a, b]$ — dyfeomorfizmem przedziałów, to $L(\gamma \circ h) = L(\gamma)$.

(3) Wykaż, że jeśli $\gamma : [a, b] \to M$ jet krzywą regularną, to funkcja $h : [a, b] \to [0, L(\gamma)]$ dana wzorem $h(t) = L(\gamma|[a, t])$ jest różniczkowalna i ściśle rosnąca, a krzywa $\delta = \gamma \circ h^{-1}$ jest sparametryzowana "przy pomocy długości łuku", tzn. funkcja $t \mapsto \|\dot{\delta}(t)\|$ jest stała i równa 1.(W takim przypadku mówimy też, że krzywa $\delta$ ma *parametryzację naturalną*.)

Weźmy teraz krzywą $\gamma; [a,b] \to M$ i odwzorowanie gładkie $F : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ (gdzie oczywiście $\varepsilon > 0$). Przyjmijmy $\gamma_s = F(\cdot, s)$ dla $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

**Definicja 5.1.2** Odwzorowanie $F$ nazywamy *wariacją* krzywej $\gamma$, gdy $\gamma_0 = \gamma$. Wariację $F$ nazywamy *właściwą*, gdy $F(a,s) = \gamma(a)$ i $F(b,s) = \gamma(b)$ dla wszystkich $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Niech więc nasze odwzorowanie $F$ będzie wariacją krzywej regularnej $\gamma$. Dla dowolnego $s$, przyjmijmy $L(s) = L(\gamma_s)$. Oczywiście, $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną. Naszym najbliższym celem jest wyznaczenie pochodnej $L'(0)$. Ze względu na ćwiczenie 5.1.1, możemy przyjąć, że $\gamma$ jest sprametryzowana przy pomocy długości łuku, że więc $\|\dot\gamma\| \equiv 1$. Oznaczmy też przez $X$ i $Y$ pola wektorowe wzdłuż $F$ dane wzorami

$$X(t,s) = F_{*(t,s)}(\partial/\partial t) \quad \text{oraz} \quad Y(t,s) = F_{*(t,s)}(\partial/\partial s).$$

Oczywiście, $X(t,0) = \dot\gamma(t)$ dla wszystkich $t$. Pole $V = Y(\cdot, 0)$ jest polem wektorowym wzdłuż $\gamma$; nazywamy je *polem wariacji* $F$. Zgodnie z obserwacjami poczynionymi w paragrafie 2.10.1 pola $X$ i $Y$ można różniczkować kowariantnie (przy pomocy konekcji $\nabla$ w kierunku pól $\partial/\partial t$ i $\partial/\partial s$, a pola $\dot\gamma$ i $V$ — w kierunku pola $\partial/\partial t$. Dla dowolnego pola wektorowego $Z$ wzdłuż $\gamma$ będziemy pisać $Z'$ zamiast $\nabla_{(\partial/\partial t)} Z$.

**Twierdzenie 5.1.3** *Przy powyższych oznaczeniach,*

$$L'(0) = -\int_a^b \langle V, (\dot\gamma)'\rangle dt + \langle V(b), \dot\gamma(b)\rangle - \langle V(a), \dot\gamma(a)\rangle. \tag{5.1.3}$$

*W szczególności, jeżeli $F$ jest wariacją właściwą, to*

$$L'(0) = -\int_a^b \langle V, (\dot\gamma)'\rangle dt. \tag{5.1.4}$$

*Dowód.* Ponieważ

$$L(s) = \int_a^b \|X(t,s)\| dt,$$

a $\nabla$ jest koneksją riemannowską, więc $\nabla g = 0$ i

$$L'(s) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \|X(t,s)\| ds = \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial/\partial s} X, X\rangle}{\|X\|}(t,s) dt.$$

Ponieważ pola $\frac{\partial}{\partial t}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$ komutują (tzn. ich nawias Liego jest równy zeru), a koneksja $\nabla$ ma zerowe skręcenie, więc z kolei

$$L'(s) = \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\partial/\partial t} Y, X\rangle}{\|X\|}(t,s) dt. \tag{5.1.5}$$

W szczególności,

$$L'(0) = \int_a^b \langle V', \dot\gamma\rangle(t)dt.$$

Wreszcie, raz jeszcze dlatgo, że $\nabla$ jest koneksją riemannowską,

$$\langle V, \dot\gamma\rangle' = \langle V', \dot\gamma\rangle + \langle V, (\dot\gamma)'\rangle$$

oraz

$$L'(0) = -\int_a^b \langle V, (\dot\gamma)'\rangle dt + \langle V, \dot\gamma\rangle|_a^b,$$

co daje (5.1.3). Jeśli wariacja $F$ jest właściwa, to $V(a) = V(b) = 0$ i drugi ze składników w (5.1.3) zeruje się, so daje (5.1.4). $\square$

Będziemy mówili,że krzywa $\gamma$ jest *punktem krytycznym* funkcjonału długości, gdy $L'(0) = 0$ dla dowolnej wariacji właściwej $F$. W celu wyznaczenia takich krzywych zauważmy, że dla dowolnego pola $Z$ wzdłuż naszej krzywej $\gamma$ istnieje wariacja $F$, której pole wariacji $V$ pokrywa się z $Z$. Istotnie, wystarczy przyjąć

$$F(t,s) = \exp_{\gamma(t)}(s\cdot Z(t)).$$

Ze zwartości przedziału $[a,b]$ wynika, że odwzorowanie $F$ jest określone na pewnym zbiorze postaci $[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$; równość $V = Z$ wynika z obserwacji poczynionej w paragrafie 2.10.5: różniczka odwzorowania $\exp_x$ w zerze pokrywa się z kanonicznym izomorfizmem przestrzeni stycznej $T_xM$ i przestrzeni $T_0(T_xM)$ stycznej do $T_xM$ w zerze. Co więcej, dla dowolnego $t_0\in[a,b]$, $\delta>0$ i wektora $v\in T_{\gamma(t_0)}$ istnieje pole $Z$ wzdłuż $\gamma$ takie, że $Z(t_0) = v$ i $Z\equiv 0$ poza przedziałem $(t_0-\delta, t_0+\delta)$. Z (5.1.4) wynika więc od razu natępujący

**Wniosek 5.1.4** *Krzywa regularna $\gamma$ na rozmaitości riemannowskiej $(M,g)$ jest punktem krytycznym funkcjonału długości wtedy i tylko wtedy, gdy jest geodezyjną (względem koneksji Levi-Civita $\nabla$).* $\square$

Załóżmy teraz, że $\gamma : [a,b]\to M$ jest geodezyjną i $F : [a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ — jej wariacją. Wyznaczymy drugą pochodną $L''(0)$.

**Twierdzenie 5.1.5** *Dla dowolnej wariacji $F$ geodezyjnej normalnej $\gamma$ mamy*

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_a^b \left(\|(V^\perp)'\|^2 - \langle R(V,\dot\gamma)\dot\gamma, V\rangle\right) dt \\ &+ \langle \nabla_{\partial/\partial s}Y, \dot\gamma\rangle(b) - \langle \nabla_{\partial/\partial s}Y, \dot\gamma\rangle(a), \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

*gdzie $V^\perp$ oznacza składową pola wariacji $V$ prostopadłą do $\gamma$. W szczególności,*

$$L''(0) = \int_a^b \left(\|(V^\perp)'\|^2 - \langle R(V,\dot\gamma)\dot\gamma, V\rangle\right) dt \tag{5.1.7}$$

*dla dowolnej wariacji właściwej $F$.* $\square$

*Dowód.* Różniczkując (5.1.5) i korzystając z poprzednich rachunków otrzymujemy

$$L''(s) = \int_a^b \frac{\left(\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X\rangle + \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, X\rangle\right) \|X\|^2 - \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, X\rangle^2}{\|X\|^3}(t,s)dt.$$

Ponieważ, raz jeszcze, pola $\frac{\partial}{\partial t}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$ komutują, więc ze wzoru (2.10.7) otrzymujemy

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y = R(Y,X)Y + \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} Y.$$

Stąd i z wykorzystywanej już równości

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y$$

otrzymujemy

$$L''(s) = \int_a^b \frac{\left(\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y\|^2 + \langle R(Y,X)Y, X\rangle + (\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} Y, X\rangle\right) \|X\|^2 - \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, X\rangle^2}{\|X\|^3}(t,s)dt.$$

Z kolei, ponieważ

$$\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} Y, X\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} Y, X\rangle - \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} Y, X'\rangle,$$

a wzdłuż $\gamma$ zachodzą równości $\|X\| = 1$ i $X' = \dot{\gamma}'0$, więc

$$L''(0) = \int_a^b \left(\|V'\|^2 + \langle R(V,\dot{\gamma})V, \dot{\gamma}\rangle - \langle V', \dot{\gamma}^2\rangle\right)(t)dt + \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} Y, X\rangle(t,0)\Big|_a^b.$$

Wreszcie, wzór (5.1.6) wynika z powyższego, opisanej w lemacie 4.5.1 symetrii tensora $R$ i następującej obserwacji: ponieważ $\gamma$ jest geodezyjną (tj. $(\dot{\gamma})' \equiv 0$) i $V^\perp = V - \langle V, \dot{\gamma}\rangle \cdot \dot{\gamma}$, więc

$$(V^\perp)' = V' - \langle V', \dot{\gamma}\rangle \cdot \dot{\gamma} = (V')^\perp.$$

Tak jak w twierdzeniu 5.1.3, równość (5.1.7) wynika bezpośrednio z (5.1.6): jeżeli $F$ jest wariacją właściwą, to $Y(a,s) = 0$ i $Y(b,s) = 0$ dla wszystkich $s$, więc $\nabla_{\partial/\partial s} Y(a,0) = 0$ i $\nabla_{\partial/\partial s} Y(b,0) = 0$. □

Ponieważ $R(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) \equiv 0$ i $\|W'\|^2 = \langle W', W\rangle' - \langle W'', W\rangle$ dla dowolnego pola $W$ wzdłuż $\gamma$, więc wzór (5.1.7) można zapisać w postaci

$$L''(0) = -\int_a^b \langle (V^\perp)'' + R(V^\perp, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, V^\perp\rangle dt. \tag{5.1.8}$$

Powyższa równość motywuje następujące określenie.

**Definicja 5.1.6** Pole wektorowe $Z$ wzdłuż geodezyjnej $\gamma : [a,b] \to M$ nazywamy *polem Jacobiego*, gdy

$$Z'' + R(Z, \dot\gamma)\dot\gamma = 0. \tag{5.1.9}$$

Weźmy bazę ortonormalną $(e_1, \dots, e_n)$, $e_n = \dot\gamma(a)$, przestrzeni $T_{\gamma(a)}M$ i oznaczmy przez $E_i$, $i = 1, \dots, n$, pole wzdłuż $\gamma$ otrzymane przez przeniesienie równoległe wektora $e_i$ wzdłuż $\gamma$: $E_i(t) = \tau_{\gamma|[a,t]}(e_i)$. Wtedy $E_n = \dot\gamma$, $E_i' = 0$, a jeśli $Z = \sum_i z_i E_i$, to równanie (5.1.9) jest równoważne jednorodnemu układowi liniowych równań różniczkowych zwyczajnych:

$$z_i'' + \sum_k z_k R^i_{knn} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie $R^l_{ijk}$ są współrzędnymi tensora krzywizny $R$ w bazie $(E_i)$. Wynika stąd, że pola Jacobiego wzdłuż $\gamma$ tworzą przestrzeń wektorową wymiaru $2n$ (nad $\mathbb{R}$). Istotnie, każde takie pole jest wyznaczone jednoznacznie przez dwa wektory $Z(a)$ i $Z'(a)$ przestrzeni $T_{\gamma(a)}M$. Oczywiście, $\dot\gamma$ i $c \cdot \dot\gamma$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ są polami Jacobiego. Ponadto, ponieważ $R^n_{knn} = 0$ dla wszystkich $k$, więc współrzędna $z_n = \langle Z, \dot\gamma\rangle$ pola Jacobiego $Z$ spełnia równanie $z_n'' = 0$ i jest funkcją liniową zmiennej $t$. Podobnie, $\langle Z', \dot\gamma\rangle = z_n' = \text{const}$. Z (5.1.8) wynika też, że istotną rolę w rachunku wariacyjnym geodezyjnych odgrywają pola Jacobiego prostopadłe do $\gamma$. Z powyższych rozważań wynika, że pola takie tworzą przestrzeń wektorową wymiaru $2(n-1)$. Jak poprzednio, każde takie pole jest wyznaczone przez warunki początkowe $Z(a)$ i $Z'(a)$, które powinny być wektorami stycznymi do $M$ w punkcie $\gamma(a)$ i prostopadłymi do $\dot\gamma(a)$. W dalszym ciągu, przestrzeń wszystkich pól Jacobiego wdłuż $\gamma$ oznaczymy przez $\mathcal{J}_\gamma$, zaś przestrzeń pól Jacobiego prostopadłych do $\gamma$ — przez $\mathcal{J}_\gamma^\perp$.

**Ćwiczenie 5.1.7** Wykaż, że prostopadłe do geodezyjnej $\gamma$ pola Jacobiego na rozmaitości riemannowskiej o stałej krzywiźnie sekcyjnej $c$ są dane równaniami

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i \operatorname{sh}_c(t) + b_i \operatorname{ch}_c(t)) \cdot E_i(t), \tag{5.1.10}$$

gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $E_i$ są ortonormalnymi polami równoległymi i prostopadłymi do rozważanej geodezyjnej, zaś $\operatorname{sh}_c$ i $\operatorname{ch}_c$ funkcjami danymi wzorami

$$\operatorname{sh}_c(t) = \sin(\sqrt{c}t) \text{ i } \operatorname{ch}_c(t) = \cos(\sqrt{c}t), \text{ gdy } c > 0,$$

$$\operatorname{sh}_c(t) = \sinh(\sqrt{-c}t) \text{ i } \operatorname{ch}_c(t) = \cosh(\sqrt{-c}t), \text{ gdy } c < 0,$$

$$\operatorname{sh}_c(t) = t \text{ i } \operatorname{ch}_c(t) = 1, \text{ gdy } c = 0.$$

### 5.1.2 Punkty sprzężone

Niech $\gamma : [0, b] \to M$ będzie — jak zwykle — geodezyjną o parametryzacji naturalnej na rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$.

**Definicja 5.1.8** Punkty $t_1, t_2 \in [0, b]$ nazywamy *sprzężonymi* (wzdłuż $\gamma$), gdy istnieje nietrywialne pole Jacobiego $Z$ wzdłuż $\gamma$ takie, że $Z(t_1) = 0$ i $Z(t_2) = 0$.

Połóżmy $x = \gamma(0)$ i $v = \dot\gamma(0)$ oraz weźmy dowolny wektor $w \in T_xM$. Określmy wariację $F$ geodezyjnej $\gamma$ wzorem

$$F(t, s) = \exp_x(t(v + sw)).$$

Odpowiadające jej pole wariacji $V$ jest dane wzorem

$$V(t) = (\exp_x)_*(t \cdot \iota_{tv}(w)), \tag{5.1.11}$$

gdzie $\iota_{tv} : T_xM \to T_{tv}(T_xM)$ jest naturalnym izomorfizmem. Oczywiście, $V(0) = 0$ i $V'(0) = w$. Rachunki podobne do przeprowadzonych w dowodzie twierdznia 5.1.5 pozwalają wykazać (co pozostawiamy Czytelnikowi w postaci ćwiczenia), że $V$ jest polem Jacobiego.

**Ćwiczenie 5.1.9** Wykaż, że pole $V$ dane wzorem (5.1.11) jest polem Jacobiego wzdłuż geodezyjnej $\gamma$.

Co więcej, jeśli $Z$ jest polem Jacobiego wzdłuż $\gamma$ i $Z(0) = 0$, to wzór (5.1.11) z $w = Z'(0)$ określa pole Jakobiego $V$, dla którego $V(0) = Z(0)$ i $V'(0) = Z'(0)$; zatem $V = Z$, a w konsekwencji każde zerujące się w chwili 0 pole Jacobiego wzdłuż $\gamma$ powstaje z wariacji geodezyjnej $\gamma$ poprzez rodzinę geodezyjnych o wspólnym początku $x = \gamma(0)$.

Powyższe rozważania dają od razu

**Twierdzenie 5.1.10** *Przestrzeń pól Jacobiego zerujących się w punktach* $0$ *i* $t_0 \leqslant b$ *jest izomorficzna z jądrem różniczki odwzorowania wykładniczego* $\exp_x$ *w punkcie* $t_0\dot\gamma(0)$. *W konsekwencji, punkty* $0$ *i* $t_0$ *są sprzężone wzdłuż* $\gamma$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\ker(\exp_x)_*(t_0\dot\gamma(0)) \neq 0$. □

### 5.1.3 Lemat Gaussa

Wyposażmy przestrzeń styczną $T_xM$ w tensor Riemanna, dla którego wszystkie naturalne izomorfizmy $\iota_v : T_xM \to T_v(T_xM)$, $\iota_v(w) = (t \mapsto v + tw)\dot{}(v)$, są izometriami. Oznaczając symbolem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iloczyny skalarne zarówno w $T_xM$ jak i w przestrzeniach stycznych do $T_xM$ mamy

$$\langle v, w \rangle = \langle \iota_u(v), \iota_u(w) \rangle$$

dla wszystkich $u, v, w \in T_xM$. Mamy nadzieję, że użycie tego samego symbolu na oznaczenie dwu formalnie różnych tensorów Riemanna nie sprawi Czytelnikowi kłopotu.

**Lemat 5.1.11** (lemat Gaussa) *Jeżeli $x \in M$, $v \in T_xM$ leży w dziedzinie odwzorowania wykładniczego $\exp_x$, $\xi = (t \mapsto tv)\dot{}(1)$ i $\zeta \in T_v(T_xM)$, to*

$$\langle \xi, \zeta \rangle = \langle (\exp_x)_*(\xi), (\exp_x)_*(\zeta) \rangle. \tag{5.1.12}$$

Innymi słowy, odwzorowanie wykładnicze $\exp_x$ zachowuje iloczyn skalarny wektorów, z których jeden ma kierunek "radialny" (rysunek !).

*Dowód.* Niech $\gamma : [0, 1] \ni t \mapsto \exp_x(tv)$ będzie geodezyjną, zaś $Z$ takim polem Jacobiego wzdłuż $\gamma$, że $Z(0) = 0$ i $Z'(0) = \iota_v^{-1}(\zeta)$. Wtedy — wobec (5.1.11) — zachodzi równość $Z(1) = (\exp_x)_*(\zeta)$, a ponieważ $\dot\gamma(1) = (\exp_x)_*(\xi)$, więc $\langle Z, \dot\gamma \rangle(1) = \langle (\exp_x)_*(\zeta), (\exp_x)_*(\xi) \rangle$. Z drugiej strony, funkcja $t \mapsto \langle Z, \dot\gamma \rangle(t)$ jest liniowa i $\langle Z, \dot\gamma \rangle(0) = 0$, więc $\langle Z, \dot\gamma \rangle(1) = \langle Z'(0), \dot\gamma(0) \rangle = \langle \iota_v^{-1}(\zeta), v \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle$. □

Bezpośrednim wnioskiem z lematu Gaussa jest fakt następujacy.

**Wniosek 5.1.12** *Jeżeli $x \in M$, $v \in T_xM$ leży w dziedzinie $D_x$ odwzorowania wykładniczego $\exp_x$, $\alpha(t) = tv$ dla $t \in [0, 1]$ i $\beta : [0, 1] \to D_x$ jest krzywą łączącą $0$ z $v$, to*

$$L(\exp \circ \beta) \geqslant L(\exp \circ \alpha). \tag{5.1.13}$$

*Co więcej, jeżeli istnieje $t_0 \in (0, 1)$ takie, że $(\exp_x)_*(\dot\beta(t_0)^\perp) \neq 0$, gdzie $\xi^\perp$ oznacza składową wektora $\xi \in T_{t_0 v}T_xM$ ortogonalną do krzywej $\alpha$, to*

$$L(\exp \circ \beta) > L(\exp \circ \alpha). \tag{5.1.14}$$

*Dowód.* Ustalmy $t \in (0, 1)$, połóżmy $\xi = \iota_{\beta(t)}(\beta(t)/\|\beta(t)\|)$ i dobierzmy do $\xi$ wektor $\zeta \in T_{\beta(t)}T_xM$ jednostkowy, prostopadły do $\xi$ i taki, że

$$\dot\beta(t) = \langle \dot\beta(t), \xi \rangle \cdot \xi + \langle \dot\beta(t), \zeta \rangle \cdot \zeta.$$

Z lematu Gaussa wynika, że

$$\|(\exp \dot{} \circ \beta(t)\|^2 = \langle \dot\beta(t), \zeta \rangle^2 \cdot \|(\exp_x)_*(\zeta)\|^2 + \langle \dot\beta(t), \xi \rangle^2 \geqslant \langle \dot\beta(t), \xi \rangle^2.$$

Rozważając $\beta$ jako pole wektorowe wzdłuż krzywej stałej $t \mapsto x$ otrzymujemy

$$(\|\beta\|)'(t) = \frac{\langle \nabla_{d/dt}\beta, \beta \rangle}{\|\beta\|}\Big|_t = \langle \dot\beta(t), \xi \rangle.$$

W konsekwencji,

$$\begin{aligned} L(\exp\circ\beta) &= \int_0^1 \|(\dot{\exp\circ\beta}(t)\|dt \geqslant \int_0^1 (\|\beta\|)'(t)dt = \|\beta(1)\| \\ &= \|\alpha\|(1) = \|v\| = L(\exp\circ\alpha), \end{aligned}$$

co daje (5.1.13).

Jeżeli składowa wektora $\dot{\beta}(t_0)$ ortogonalna do kierunku radialnego jest różna od zera, to to samo ma miejsce dla $t$ z pewnego otwartego otoczenia liczby $t_0$. Dla takich $t$, $\|(\dot{\exp\circ\beta}(t)\| > \langle\dot{\beta}(t),\xi\rangle$, co — w połączeniu z (5.1.13) — daje (5.1.14). □

Powyższy wniosek prowadzi z kolei do następującego, ważnego twierdzenia. Krótko mówiąc, głosi ono, że geodezyjne bez punktów sprzężonych są lokalnymi minimami funkcjonału długości.

**Twierdzenie 5.1.13** *Jeżeli $\gamma : [0,b] \to M$ jest geodezyjną nie zawierającą punktów sprzężonych, to dla dowolnej jej wariacji właściwej $F : [0,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ istnieje liczba $\delta \in (0,\varepsilon)$ taka, że krzywe $\gamma_s = F(\cdot, s)$ spełniają warunek $L(\gamma_s) \geqslant L(\gamma)$ dla wszystkich $s \in (-\delta,\delta)$. Co więcej, jeśli krzywe $\gamma$ i $\gamma_s$ nie są identyczne (z dokładnością do parametryzacji), to $L(\gamma_s) > L(\gamma)$.*

*Dowód.* Jeżeli $\gamma$ nie zawiera punktów sprzężonych, to różniczka odwzorowania wykładniczego $\exp_x$, $x = \gamma(0)$, posiada rząd maksymalny we wszystkich punktach $t\cdot\dot{\gamma}(0)$, $t \in [0,b]$. Istnieje zatem otoczenie $U$ zbioru $\{t\cdot\dot{\gamma}(0);\ t \in [0,b]\}$ otwarte w $T_xM$ i przekształcane dyfeomorficznie przez $\exp_x$ na otoczenie otwarte $W$ geodezyjnej $\gamma$. Ze zwartości przedziału $[0,b]$ wynika istnienie liczby $\delta \in (0,\varepsilon)$ takiej, że $F([0,b] \times [-\delta,\delta]) \subset W$. Wtedy, $\gamma_s = \exp\circ\phi_s$, gdzie $\phi_s = (\exp_x|V)^{-1} \circ \gamma_s$. Ponieważ wariacja $F$ jest właściwa, to do każdej pary $\alpha = \phi_0$ i $\beta = \phi_s$ ($|s| < \delta$) można zastosować pierwszą część wniosku 5.1.12. To daje nierówność $L(\gamma_s) \geqslant L(\gamma)$ dla $s \in (-\delta,\delta)$. Jeśli $\gamma_s$ jest istotnie różne od $\gamma$, to taka krzywa $\beta$ spełnia warunki drugiej części tego wniosku i w konsekwencji $L(\gamma_s) > L(\gamma)$. □

## 5.2 Odległość

Niech $(M,g)$ będzie spójną rozmaitością riemannowską. Dla dowolnych $x$ i $y \in M$ oznaczmy przez $\Omega(x,y)$ zbiór wszystkich kawałkami gładkich krzywych $\gamma : [0,1] \to M$ łączących $x$ z $y$: $\gamma(0) = x$ i $\gamma(1) = y$. Z ćwiczenia 1.1.1 wynika, że $\Omega(x,y) \neq \emptyset$ dla wszystkich $x$ i $y$. Możemy więc przyjąć następujące określenie:

$$d(x,y) = \inf\{L(\gamma); \gamma \in \Omega(x,y)\}. \tag{5.2.1}$$

Oczywiście $d : M \times M \to \mathbb{R}$ jest funkcją nieujemną i symetryczną, a ponieważ dla dowolnych krzywych $\gamma \in \Omega(x,y)$ i $\delta \in \Omega(y,z)$ ich złączenie $\delta * \gamma$ ($\delta * \gamma(t) = \gamma(2t)$

gdy $t \in [0, 1/2]$, zaś $\delta * \gamma(t) = \delta(2t - 2)$ gdy $t \in [1/2, 1]$) należy do $\Omega(x, z)$ i spełnia warunek $L(\delta * \gamma) = L(\delta) + L(\gamma)$, więc $d$ spełnia nierówność trójkąta:

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

dla wszyskich $x, y$ i $z \in M$. Co więcej, jeżeli $x \neq y$ i $\varepsilon > 0$ jest na tyle małe, że kula $B(0, \varepsilon)$ jest zawarta w dziedzinie odwzorowania wykładniczego $\exp_x$ i $\exp_x |B(0, \varepsilon)$ jest dyfeomorfizmem, to — na mocy wniosku 5.1.12 z Lematu Gaussa — $d(x, y) \geqslant L(\gamma)$ gdy $y \in \exp_x(B(0, \varepsilon))$ i $\gamma$ jest geodezyjną w $\exp_x(B(0, \varepsilon))$ łączącą $x$ z $y$, zaś $d(x, y) \geqslant \varepsilon$ gdy $y \notin \exp_x(B(0, \varepsilon))$. W obu przypadkach $d(x, y) > 0$. Zatem, $d$ jest metryką w zbiorze wszystkich punktów rozmaitości $M$. Ponieważ odwzorowania wykładnicze $\exp_x$ jest dyfeomorfizmem pewnego otwartego otoczenia wektora zerowego $0 \in T_xM$ na pewne otoczenie punktu $x$ otwarte w $M$, więc rozumowanie powyższe pokazuje też, że topologia wyznaczona przez metrykę $d$ pokrywa się z oryginalną topologią rozmaitości $M$. Mamy więc następujące

**Twierdzenie 5.2.1** *Para $(M, d)$, gdzie $d$ jest dane wzorem (5.2.1), jest przestrzenią metryczną.* □

Twierdzenie to wraz z twierdzeniem 4.1.2 daje natychmiast następujący

**Wniosek 5.2.2** *Każda rozmaitość parazwarta jest metryzowalna.* □

## 5.3 Wypukłość

## 5.4 Zupełność

## 5.5 Porównywanie

# Bibliografia


[**En1**] R. Engelking, Zarys topologii ogólnej, PWN, Warszawa 1965.

[**En2**] R. Engelking, Topologia ogólna, PWN, Warszawa 19**.

[**Gan**] J. Gancarzewicz, Geometria różniczkowa, PWN, Warszawa, 1987.

[**Hir**] M. W. Hirsch, Differential Topology, Springer Verlag, 1976.

[**Ker**] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comm. Math. Helv. **34** (1960), 104 – 106.

[**Le**] F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa 1963.

[**KN**] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, vol. I and II, Interscience Publ., New York – London, 1963 and 1969.

[**Si**] R. Sikorski, Rachunek różniczkowy i całkowy, funkcje wielu zmiennych, PWN, Warszawa 1967.